

Wyznaczanie ogniskowej soczewki metodą Bessela

Wymagania do ćwiczenia

1. Równanie cienkiej soczewki, powiększenie obrazu.
2. Konstruowanie obrazów otrzymywanych za pomocą soczewek.
3. Rodzaje obrazów.

Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, tom 4, Warszawa 2015, PWN, str. 53-59
2. J. R. Meyer-Arendt: Wstęp do optyki, Warszawa 1977, PWN, str. 43-52,
3. S. Pieńkowski: Fizyka doświadczalna, t. 3 Optyka, Warszawa 1955, PWN, str. 148-149,
4. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 3, [Rozdział 2.4: Cienkie soczewki](#).

Przykładowe pytania

1. Wyjaśnij, jakie są różnice pomiędzy obrazem rzeczywistym i pozornym?
2. Czy można zobaczyć obraz pozorny? Uzasadnij swoją odpowiedź.
3. Czy można sfotografować obraz pozorny? Uzasadnij swoją odpowiedź.
4. Czy można wyświetlić obraz pozorny na ekranie? Uzasadnij swoją odpowiedź.
5. Czy wyświetlenie obrazu rzeczywistego na ekranie jest konieczne, aby go zobaczyć? Uzasadnij.
6. Co nazywamy ogniskiem soczewki skupiającej, a co ogniskiem soczewki rozpraszającej? Co to jest ogniskowa soczewki? Gdzie skupiają się promienie padające na soczewkę jako równoległe do siebie ale nierównoległe do osi optycznej? Przy odpowiedziach postuż się też rysunkiem.
7. Czy ogniskowa zmieni się, gdy soczewka zostanie zanurzona w wodzie? Uzasadnij odpowiedź za pomocą odpowiedniego wzoru.
8. Wyznacz graficznie położenie obrazu, gdy przedmiot położony jest w odległości $x = 3f$ od soczewki skupiającej, gdzie f to ogniskowa soczewki. Na rysunku przyjmij dowolny rozmiar ogniskowej i soczewki. Scharakteryzuj utworzony obraz za pomocą określeń: rzeczywisty, pozorny; prosty, odwrócony; pomniejszony, powiększony.

9. Wyznacz graficznie położenie obrazu, gdy przedmiot położony jest w odległości $x = f$ od soczewki rozpraszającej, gdzie f to ogniskowa soczewki. Na rysunku przyjmij dowolny rozmiar ogniskowej i soczewki. Scharakteryzuj utworzony obraz za pomocą określeń: rzeczywisty, pozorny; prosty, odwrócony; pomniejszony, powiększony.
10. Napisz równanie soczewki, wiążące odległości przedmiotu i obrazu. Wyjaśnij znaczenie każdego symbolu.
11. Zdefiniuj powiększenie obrazu otrzymanego za pomocą soczewki. Podaj także, jak powiększenie zależy od odległości używanych w teorii soczewki. Wyjaśnij znaczenie każdego symbolu.
12. Co nazywamy zdolnością skupiającą soczewki i jaka jest jej jednostka? Czy ogniskowa soczewki i jej zdolność skupiająca mogą być ujemne?
13. Podaj, jakie wielkości fizyczne są mierzone w metodzie Bessela dla soczewki, a jakie wielkości są obliczane. Wielkości te zaznacz na rysunku. Narysuj też bieg promieni świetlnych.

Przyrządy pomiarowe

Linijka, papier milimetrowy (do odczytu wysokości obrazu), pryzmiar metrowy,

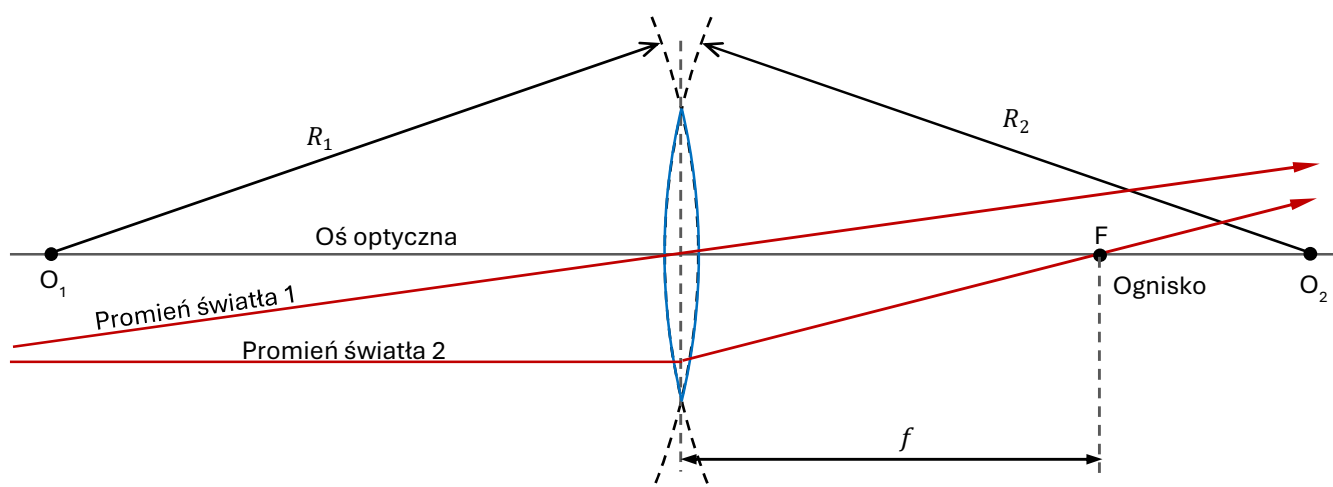


WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Soczewki – równanie soczewki, otrzymywanie obrazów za pomocą soczewek

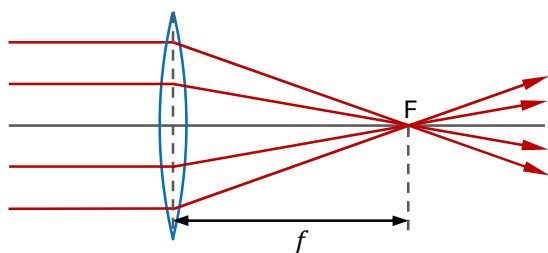
Soczewką nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema powierzchniami kulistymi (wypukłymi lub wklęsłymi) lub jedną powierzchnią kulistą, a jedną płaską i posiadające inny współczynnik załamania niż ośrodek otaczający. Każda powierzchnia kulista soczewki ma swój środek krzywizny (O_1 lub O_2) i odpowiadający jej promień (R_1 lub R_2). Prostą przechodzącą przez oba środki krzywizny nazywa się osią optyczną soczewki (Rys. 1). Soczewka jest definiowana jako cienka, jeżeli jej grubość jest znacznie mniejsza niż promienie krzywizny obu powierzchni załamujących. W tym przypadku można uznać, że promienie światła są załamane przez soczewkę tylko raz. To upraszczające założenie będzie obowiązywało w całym poniższym omówieniu.



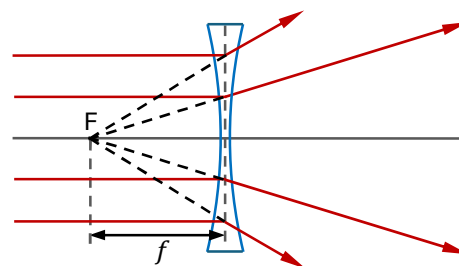
Rys. 1. Podstawowe parametry geometryczne soczewki

Dla cienkiej soczewki skupiającej wszystkie promienie biegnące równoległe do osi optycznej (tak jak promień 2 na Rys. 1) po załamaniu w soczewce skupiają się w punkcie F zwanym ogniskiem soczewki. Odległość tego punktu do środka soczewki nosi nazwę ogniskowej soczewki f . Dla soczewki rozpraszającej w ognisku skupiają się przedłużenia promieni rozbieżnych załamanych w soczewce (Rys. 2b) uprzednio padających na soczewkę równoległe do osi optycznej.

Każda cienka soczewka ma dwa ogniska leżące po przeciwnych stronach w równych odległościach od soczewki.

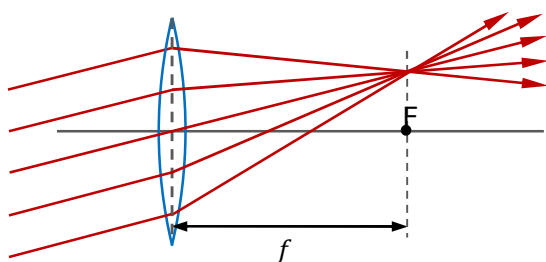


Rys. 2a. Soczewka skupiająca

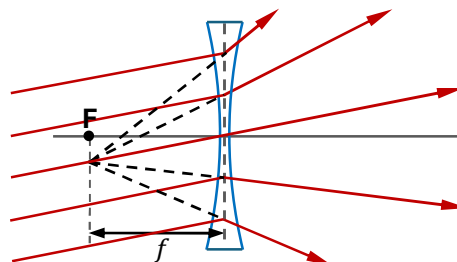


Rys. 2b. Soczewka rozpraszająca

Jeżeli przyjmiemy, że soczewka składa się z pryzmatów o rosnącym kącie łamiącym w miarę oddalania się od osi soczewki, to w części środkowej będziemy mieć dwa pryzmaty złożone podstawami o zerowym kącie łamiącym dające płytkę płaskorównoległą. Dlatego promień światła padający na środek soczewki przechodzi przez nią bez zmiany kierunku. Natomiast każda wiązka równoległa (czyli skolimowana), ale tworząca z osią optyczną dowolny kąt, po przejściu przez soczewkę zostanie skupiona w płaszczyźnie ogniskowej (Rys. 3a, Rys. 3b). Konkretnie miejsce skupienia się promieni w tej płaszczyźnie jest wyznaczone przez niezłamany promień przechodzący przez środek soczewki.



Rys. 3a. Soczewka skupiająca – załamanie promieni równoległych do siebie, ale nierównoległych do osi optycznej, i skupienie ich w płaszczyźnie ogniskowej, ale poza osią optyczną

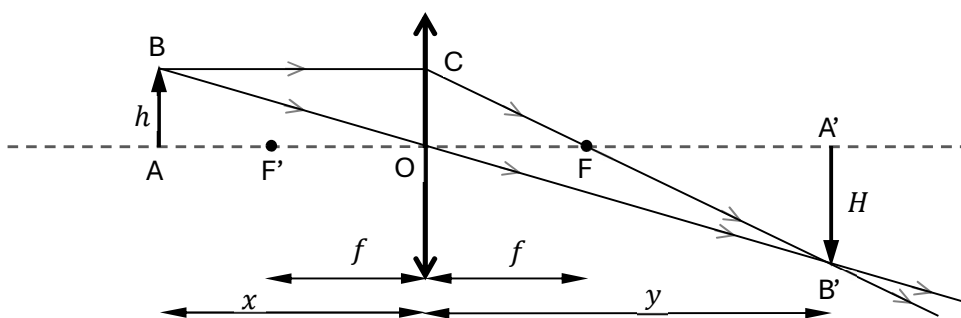


Rys. 3b. Soczewka rozpraszająca – załamanie promieni równoległych do siebie, ale nierównoległych do osi optycznej, i skupienie ich przedłużeń w płaszczyźnie ogniskowej, ale poza osią optyczną

W celu znalezienia dla danego przedmiotu jego obrazu otrzymywanego przy użyciu soczewki wystarczy znaleźć punkt przecięcia dwu dowolnie wybranych promieni wychodzących z jednego punktu tego przedmiotu. Zwykle są to alternatywnie:

1. promień przechodzący przez środek geometryczny soczewki, przechodzi jak przez płytkę płaskorównoległą nie zmieniając kierunku,
2. promień równoległy do osi optycznej soczewki, który po załamaniu w soczewce przechodzi przez ognisko,
3. promień przechodzący przez ognisko przed soczewką, który po załamaniu staje się równoległy do osi optycznej.

Konstrukcje obrazu $A'B'$ przedmiotu AB przedstawia Rys. 4, gdzie soczewkę oznaczono powszechnie stosowanym symbolem linii z podwójną strzałką.



Rys. 4. Konstrukcja obrazu rzeczywistego otrzymanego za pomocą soczewki skupiającej

Korzystając z podobieństwa trójkątów ABO i A'B'O oraz trójkątów OCF i A'B'F można wyprowadzić równanie soczewki i wzór na powiększenie liniowe obrazu. I tak – równanie soczewki:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad (1)$$

gdzie:

x – odległość przedmiotu od środka soczewki i przyjmuje się zawsze za dodatnią,

y – odległość obrazu od środka soczewki, dodatnia dla obrazów położonych po innej stronie soczewki niż przedmiot i ujemna dla obrazów położonych po tej samej stronie soczewki co przedmiot,

f – ogniskowa soczewki, dodatnia dla soczewki skupiającej i ujemna dla soczewki rozpraszającej.

Natomiast powiększenie liniowe obrazu, zdefiniowane jako stosunek wysokości obrazu H do wysokości przedmiotu h , następująco zależy od odległości x i y :

$$p \equiv \frac{H}{h} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

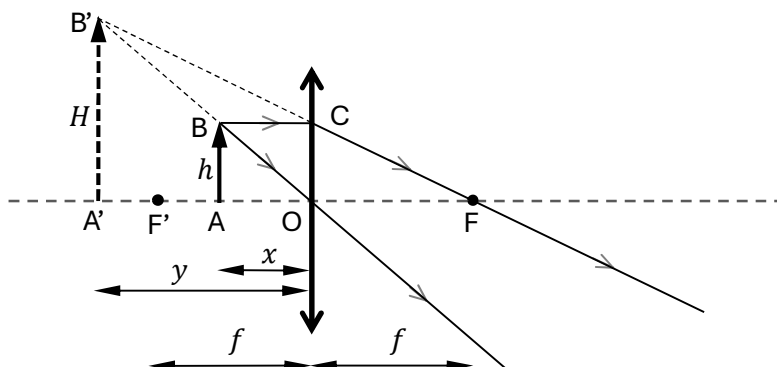
co bezpośrednio wynika z podobieństwa trójkątów ABO i A'B'O na Rys. 4.

Wzory (1) i (2), chociaż wyprowadzone powyżej dla soczewki skupiającej, są słuszne także dla soczewki rozpraszającej oraz dla wszystkich odległości przedmiotu i obrazu.

Obrazy można sklasyfikować według trzech kryteriów. Pierwsze kryterium dzieli obrazy na proste (nieodwrócone względem przedmiotu) i odwrócone. Drugie kryterium wyróżnia obrazy pomniejszone i powiększone (względem przedmiotu), a trzecie dzieli obrazy na rzeczywiste i pozorne.

Obraz nazywamy **rzeczywistym**, jeżeli każdy jego punkt jest utworzony z przecięcia się promieni **zbieżnych** biegnących od przedmiotu i soczewki, takich jak na Rys. 3a lub jak promienie zbiegające się w punkcie B' na Rys. 4. Taki obraz można obserwować, wstawiając w miejsce jego powstania ekran odbijający i rozpraszający te promienie. Można go też obserwować bez ekranu, umieszczając oko lub aparat fotograficzny w strumieniu promieni rozbieżnych rozchodzących się z tego obrazu rzeczywistego, takich jak promienie rozbiegające się z tego samego punktu B' na Rys. 4. Jest to możliwe, ponieważ oko i aparat fotograficzny są przystosowane do odbierania promieni rozbieżnych.

Obraz nazywamy **pozornym**, jeżeli każdy jego punkt jest utworzony z przecięcia się wstecznych przedłużeń promieni **rozbieżnych** biegnących od przedmiotu i soczewki, jak na Rys. 3b lub Rys. 5. Przedłużenia te zaznaczono linią przerywaną (jak również sam obraz pozorny). Obraz taki można obserwować okiem lub aparatem fotograficznym umieszczając go w strumieniu promieni rozbieżnych.

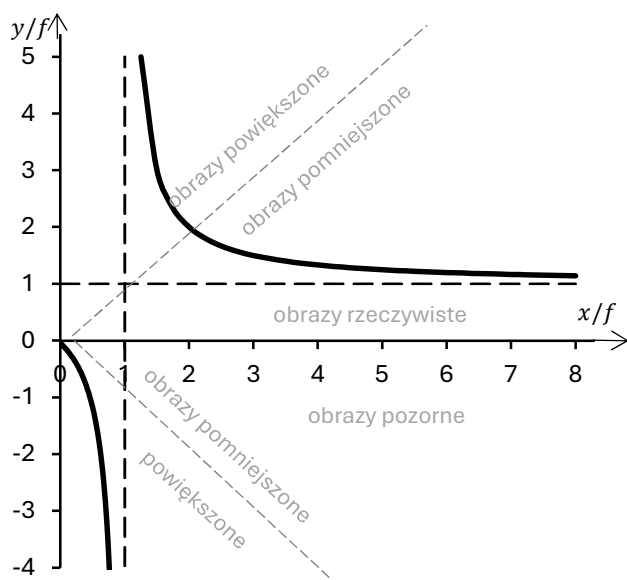


Rys. 5. Konstrukcja obrazu pozornego otrzymanego za pomocą soczewki skupiającej

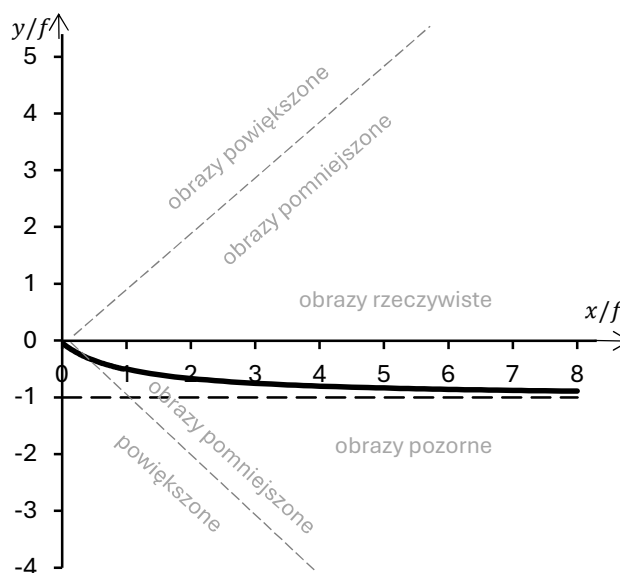
Zależność odległości obrazu y od odległości przedmiotu x dla soczewki skupiającej o ogniskowej f przedstawia Rys. 6a. Zależność tę otrzymujemy z równania soczewki (1), gdzie $f > 0$:

$$y = \frac{fx}{x - f} = \frac{f}{1 - \frac{f}{x}}$$

Dla $0 < x < f$ soczewka daje obrazy pozorne i powiększone. Dla $x \rightarrow f$, $y \rightarrow \pm\infty$. Dla $x > f$ soczewka daje obrazy rzeczywiste, przy czym dla $f < x < 2f$ obrazy są powiększone, a dla $x > 2f$ obrazy są pomniejszone. W granicy $x \rightarrow \infty$, y maleje asymptotycznie do wartości f .



Rys. 6a. Zależność odległości obrazu y od odległości przedmiotu x dla soczewki skupiającej



Rys. 6b. Zależność odległości obrazu y od odległości przedmiotu x dla soczewki rozpraszającej

Zależność odległości obrazu y od odległości x dla soczewki rozpraszającej o ogniskowej f przedstawia Rys.

6b. Dla $x > 0$ otrzymujemy z równania (1) tylko obrazy pozorne pomniejszone w odległości:

$$y = \frac{-fx}{x+f} = -\frac{f}{1+\frac{f}{x}}$$

Wraz ze wzrostem x odległość y asymptotycznie zbliża się do wartości $-f$.

Obszary opisane słownie na obu Rys. 6 wynikają z tego, że:

- obrazy rzeczywiste powstają dla odległości obrazu $y > 0$, a pozorne dla $y < 0$;
- obrazy powiększone, dla których powiększenie $p > 1$, charakteryzują się też tym, że $\frac{y}{x} > 1$, co wynika z zależności (2); dla obrazów pomniejszonych obowiązuje $p < 1$, a więc także $\frac{y}{x} < 1$,

Reasumując, z analizy równania soczewki (1), na podstawie twierdzenia o powiększeniu (2) oraz Rys. 4 i Rys. 5 wynika, że za pomocą soczewek możemy otrzymywać obrazy:

1. rzeczywiste: odwrócone, powiększone lub pomniejszone,
2. pozorne: nieodwrócone, powiększone lub pomniejszone.

Można również wyprowadzić zależność między ogniskową f soczewki, a jej promieniami krzywizn R_1 i R_2 (Rys. 1) oraz współczynnikami załamania soczewki n i ośrodka otaczającego soczewkę n'

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n'} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (3)$$

przy czym przyjmuje się konwencję, że jeżeli soczewka jest wklęsła z którejś strony, to z tej strony jej promień krzywizny jest mniejszy od zera.

Zgodnie z tą zależnością, ogniskowa soczewki zależy od współczynników załamania n i n' , a więc w danym ośrodku ogniskowa soczewki jest stała. Gdy $n' > n$ z soczewki skupiającej otrzymuje się rozpraszającą (f ujemne) i odwrotnie.

Zdolność skupiającą soczewki D definiuje się jako stosunek współczynnika załamania ośrodka otaczającego n' do ogniskowej f (wyrażonej w metrach):

$$D = \frac{n'}{f}, \quad \text{lub w powietrzu} \quad D = \frac{1}{f}. \quad (4)$$

W powietrzu, dla którego $n' \approx 1$, miara zdolności skupiającej jest odwrotnością ogniskowej $D = 1/f$. Jednostką zdolności skupiającej jest jedna dioptria – 1 D. Jest to zdolność skupiająca soczewki o ogniskowej $f = 1$ m. Soczewka o krótkiej ogniskowej będzie miała dużą zdolność skupiającą i na odwrót. Soczewka skupiająca ma dodatnią zdolność skupiającą, natomiast rozpraszająca ma ujemną zdolność skupiającą.



Pomiar odległości ogniskowej soczewki metodą Bessela

Metoda Bessela polega na uzyskiwaniu obrazów danego przedmiotu za pomocą soczewki przy ustalonej odległości ekranu od przedmiotu.

Dla ustalonej i odpowiednio dużej odległości ekranu od przedmiotu (oznaczamy ją przez e) istnieje położenie soczewki, przy którym na ekranie otrzymuje się rzeczywisty obraz przedmiotu (Rys. 7). Jeżeli odległość ekranu od soczewki oznaczmy przez y , odległość przedmiotu od soczewki przez x , gdzie $x = e - y$, to równanie soczewki (1) przybierze postać:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{y} + \frac{1}{e - y} \quad (5)$$

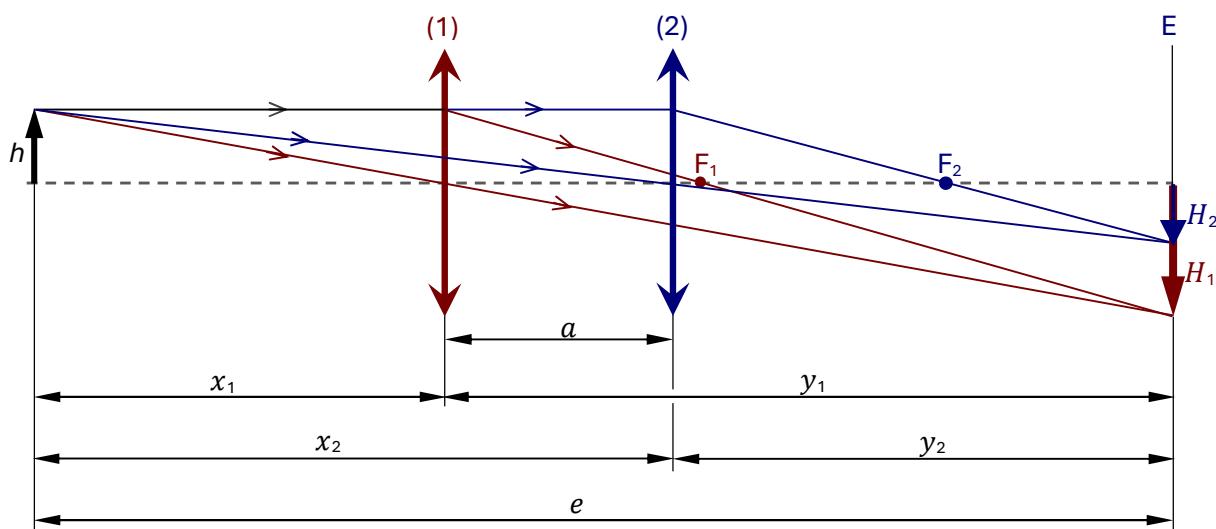
lub po kolejnych przekształceniach

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{y(e - y)}, \quad y(e - y) = fe.$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na y . Pierwiastkami tego równania są:

$$y_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4fe}}{2}, \quad (6)$$

gdzie y_1 jest odległością soczewki od ekranu, dla której otrzymujemy obraz powiększony, zaś dla y_2 obraz pomniejszony (Rys. 7). Równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki gdy $\Delta > 0$, czyli $e^2 - 4fe > 0$, a zatem metoda Bessela wymaga aby $e > 4f$.



Rys. 7. Konstrukcja obrazów otrzymanych przy pomocy soczewki skupiającej, dla jej położen (1) i (2)

Z rysunku widać, że $a = y_1 - y_2$. Zauważmy, że po wstawieniu zależności (6):

$$a = y_1 - y_2 = \frac{e + \sqrt{e^2 - 4fe}}{2} - \frac{e - \sqrt{e^2 - 4fe}}{2} = \sqrt{e^2 - 4fe}. \quad (7)$$

Otrzymujemy z tego poszukiwaną ogniskową soczewki:

$$f = \frac{e^2 - a^2}{4e} \quad \text{czyli} \quad f = \frac{(e - a)(e + a)}{4e}. \quad (8)$$

Dla położenia soczewki dającego obraz powiększony możemy napisać na podstawie (2)

$$p_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{y_1}{x_1}. \quad (9)$$

Analogicznie dla położenia soczewki dającego obraz pomniejszony możemy napisać

$$p_2 = \frac{H_2}{h} = \frac{y_2}{x_2}. \quad (10)$$

Mnożąc stronami równania (9) i (10) otrzymujemy:

$$\frac{H_1 H_2}{h^2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} \quad (11)$$

Rozwiązując równanie soczewki (1) otrzymaliśmy pierwiastki w postaci $y_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4fe}}{2}$. Jeżeli to równanie rozwiążemy ze względu na x , to znaczy najpierw do niego wstawimy $y = e - x$, otrzymamy identyczne wartości $x_{1,2} = \frac{e \mp \sqrt{e^2 - 4fe}}{2}$. Oznacza to, że $y_1 y_2 = x_1 x_2$. Dlatego z równania (11) dostajemy $\frac{H_1 H_2}{h^2} = 1$, z czego wynika, że poszukiwana wysokość przedmiotu:

$$h = \sqrt{H_1 H_2}. \quad (12)$$

Na koniec można obliczyć jeszcze powiększenie obrazu. Obliczenie z definicji, czyli z wykorzystaniem pierwszych części równań (9) i (10), jest niedokładne, ponieważ w ćwiczeniu wysokości obrazów H_1 i H_2 są mierzone z małą dokładnością. Dlatego lepiej jest obliczyć powiększenie z twierdzenia, czyli z drugich części równań (9) i (10), co daje

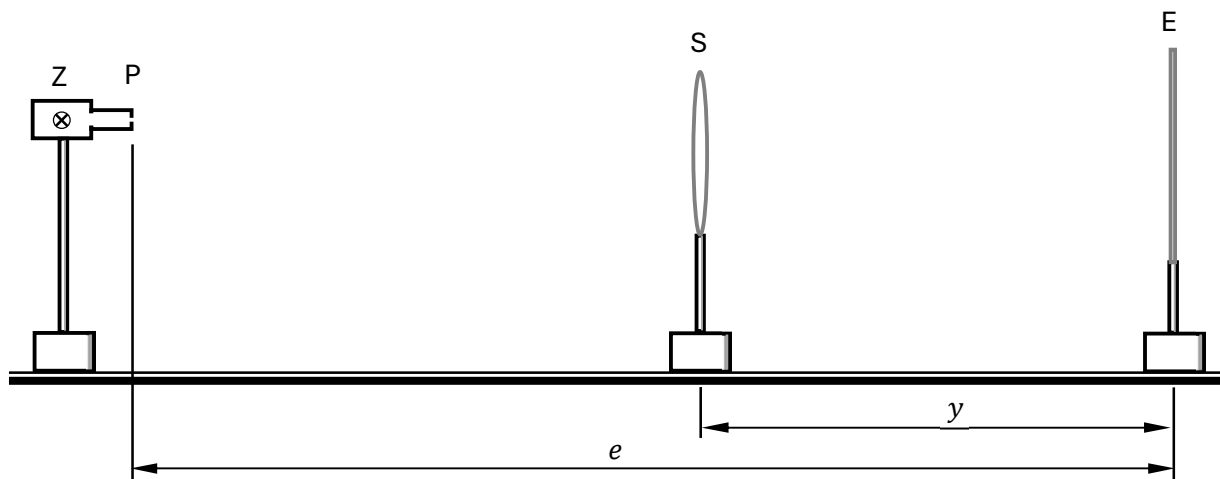
$$p_1 = \frac{y_1}{e - y_1}, \quad p_2 = \frac{y_2}{e - y_2}. \quad (13)$$



Metodologia wykonania pomiarów



Rys. 8. Rzeczywisty wygląd stanowiska pomiarowego



Rys. 9. Schemat układu pomiarowego: Z – źródło światła, P – płaszczyzna przedmiotu, S – soczewka, E – ekran (płaszczyzna obrazu)

1. Ustawić układ pomiarowy jak na Rys. 9, odczytać ze skali odległość e między przedmiotem P (szczeliną) a ekranem E z dokładnością ± 1 mm.
2. Przesuwając soczewkę w kierunku ekranu znaleźć takie jej położenie y_1 , aby na ekranie widoczny był powiększony ostry obraz przedmiotu. Zmierzyć y_1 z dokładnością ± 1 mm oraz wysokość powstałego obrazu H_1 z dokładnością ± 1 mm.

- Przesuwając dalej soczewkę w kierunku ekranu przy niezmiennionej odległości e , znaleźć drugie jej położenie y_2 takie, aby na ekranie powstał ostry pomniejszony obraz przedmiotu. Zmierzyć y_2 z dokładnością ± 1 mm oraz wysokość powstałego obrazu H_2 z dokładnością ± 1 mm.
- Czynności wymienione w punkcie 2 i 3 powtórzyć 10 razy, a wyniki pomiarów zapisać w tabeli.



Tabela pomiarowa

e [mm]	y_1 [mm]	y_2 [mm]	H_1 [mm]	H_2 [mm]



Obliczenia

- Obliczyć średnie wartości y_1 i y_2 . Obliczyć niepewności $u(y_1)$ i $u(y_2)$ metodą typu A. Obliczyć niepewność $u(e)$ metodą typu B.
- Z powyższych średnich obliczyć wielkość a korzystając z pierwszej części zależności (7), ogniskową soczewki f z zależności (8), oraz zdolność skupiającą soczewki D z zależności (4).
- Obliczyć niepewności $u(a)$, $u(f)$ i $u(D)$ metodą przenoszenia niepewności:

$$u(a) = \sqrt{\left[\frac{\partial a}{\partial y_1} u(y_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial y_2} u(y_2)\right]^2}, \quad u(f) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial e} u(e)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial a} u(a)\right]^2}, \quad u(D) = \left|\frac{\partial D}{\partial f}\right| u(f).$$

- Obliczyć średnie wartości H_1 i H_2 . Obliczyć niepewności $u_A(H_1)$ i $u_A(H_2)$ metodą typu A. Obliczyć także niepewności $u_B(H_1)$ i $u_B(H_2)$ tych samych wielkości metodą typu B z działki elementarnej. Jako ostateczne wartości $u(H_1)$ i $u(H_2)$ przyjąć te niepewności, które są większe.
- Z zależności (12) obliczyć wysokość przedmiotu h . Niepewność $u(h)$ obliczyć metodą przenoszenia

$$u(h) = \sqrt{\left[\frac{\partial h}{\partial H_1} u(H_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial h}{\partial H_2} u(H_2)\right]^2}.$$

6. Obliczyć powiększenia p_1 i p_2 z twierdzenia, czyli ze wzorów (13).
7. Niepewności $u(p_1)$ i $u(p_2)$ obliczyć metodą przenoszenia niepewności:

$$u(p_{1,2}) = \sqrt{\left[\frac{\partial p_{1,2}}{\partial y_{1,2}} u(y_{1,2})\right]^2 + \left[\frac{\partial p_{1,2}}{\partial e} u(e)\right]^2}.$$

8. We wnioskach przede wszystkim poprawnie zapisać ostateczne wyniki f , D , h , p razem z niepewnościami.

Obliczenia nadobowiązkowe:

9. Obliczyć powiększenia p'_1 i p'_2 z definicji, czyli z pierwszych części zależności (9) i (10).
10. Niepewności $u(p'_1)$ i $u(p'_2)$ obliczyć metodą przenoszenia niepewności. Jednak ponieważ we wzorach (9) i (10) wielkości H_1 i h , jak również wielkości H_2 i h , są skorelowane, bo $h = \sqrt{H_1 H_2}$, to do obliczenia $u(p'_1)$ i $u(p'_2)$ wykorzystać wzory przekształcone z zależności (9) i (10) za pomocą podstawienia $h = \sqrt{H_1 H_2}$, czyli wzory

$$p'_1 = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}, \quad p'_2 = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$$

$$u(p'_{1,2}) = \sqrt{\left[\frac{\partial p'_{1,2}}{\partial H_1} u(H_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial p'_{1,2}}{\partial H_2} u(H_2)\right]^2}.$$

11. We wnioskach poprawnie porównać powiększenia p i p' otrzymane odpowiednio z twierdzenia i z definicji (za pomocą ich niepewności). Można wyciągnąć też wniosek na temat, która metoda obliczenia powiększenia jest lepsza w tym pomiarowym przypadku i dlaczego.