

Niepewność pomiarów

WSTĘP

Poniżej przedstawiono niektóre definicje ogólnych terminów metrologicznych, które obowiązywać będą na pracowni studenckiej:

Błąd pomiaru – różnica między wynikiem pomiaru a wartością mierzonej wielkości fizycznej. Bywa też nazywany **błędem bezwzględnym pomiaru**. Ponieważ wartość wielkości mierzonej (wartość prawdziwa) jest w praktyce niepoznawalna, to w celu określenia błędu posługujemy się poniższymi, bardziej precyzyjnymi terminami. Ścisłe określenie, co to jest wartość prawdziwa, zależy od użytej teorii fizycznej (fizyka klasyczna lub kwantowa).

Błąd przypadkowy – różnica między wynikiem pomiaru a średnią arytmetyczną nieskończonej liczby wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności.

Błąd przypadkowy jest wynikiem nieprzewidywalnych zmian przypadkowych czynników wpływających na pomiar; daje on przyczynek wpływających na rozrzut wyników.

Błąd systematyczny – różnica między średnią arytmetyczną nieskończonej liczby wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności, a wartością wielkości mierzonej. Błąd systematyczny jest również wynikiem czynników wpływających na pomiar, ale czynniki te można rozpoznać. Obowiązkiem eksperymentatora jest wprowadzenie poprawki kompensującej błąd systematyczny.

Błąd bezwzględny – stosunek błędu pomiaru do wartości wielkości mierzonej.

Wynik surowy – wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego.

Wynik poprawiony – wynik pomiaru po korekcji błędu systematycznego.

Niepewność pomiaru – parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości wielkości mierzonej, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Na pełną niepewność pomiaru powinny składać się wszystkie przyczynki pochodzące od rozrzutu wyników, rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego na podstawie wiedzy o mierzonej wielkości, o jej pomiarach, wykorzystanych przyrządach pomiarowych lub przyczynki wynikające z doświadczenia eksperymentatora.

Niepewność pomiaru wielkości x oznaczamy literą $u(x)$ (od angielskiego słowa "uncertainty")

Uwaga: symbol ▼ oznacza, że zapisy zawarte między nim a symbolem ▲ stanowią informację rozszerzającą, wykraczającą poza program I pracowni fizycznej, skierowaną do osób zainteresowanych głębszym zrozumieniem poruszanej w tym opracowaniu tematyki.

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

Jeżeli dokonujemy pomiaru danej wielkości fizycznej X za pomocą jakiegoś przyrządu (linijka, mikromierz, woltomierz) to pomiar taki nazywamy bezpośrednim. Natomiast jeżeli do wyznaczenia danej wielkości fizycznej Y potrzebny jest wcześniejszy bezpośredni pomiar jednej lub kilku wielkości $X_1, X_2, \dots$, z których obliczana jest wielkość Y na podstawie wzoru fizycznego, to takie wyznaczenie wielkości Y nazywamy pomiarem pośrednim.

1 Pomiary bezpośrednie

1.1 Obliczanie niepewności standardowej metodą A

Niepewność standardową mierzonej wielkości fizycznej wyznaczamy metodą typu A, jeżeli dysponujemy zestawem pomiarów powtarzanych w jednakowych warunkach, a obliczanie niepewności dokonuje się drogą analizy statystycznej.

Chociaż mierzona wielkość X jest niezmienna, to jednak pomiary dają różne wyniki na skutek istnienia przypadkowych błędów pomiarowych. Zatem wielkość X , mierzona bezpośrednio, może być traktowana jako zmienna losowa x , a wykonanie n pomiarów bezpośrednich – jako losowanie n elementowej próby z nieskończonej licznej populacji, którą stanowią wszystkie możliwe realizacje zmiennej losowej (wszelkie możliwe wartości pomiarów).

Najlepszym oszacowaniem (estymatorem) wartości oczekiwanej zmiennej losowej x modelującej wyniki pomiarów wielkości X , na podstawie wyników serii n niezależnych pomiarów $x_1, x_2, \dots, x_n$, jest **średnia arytmetyczna** obliczona ze wzoru (62, Dodatek). Dlatego jako jeden ostateczny wynik pomiaru metodą typu A przyjmuje się wartość tej średniej:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Odchylenie standardowe σ pojedynczego pomiaru jest miarą średniego rozrzutu wyników pomiarów wokół prawdziwej wartości mierzonej wielkości (wartości oczekiwanej). Jego estymatorem jest odchylenie standardowe eksperymentalne s_x , które oblicza się z zależności (63, Dodatek).

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (2a)$$

Jednak my zdecydujemy się jako wynik pomiaru podać wartość średnią $\bar{x}$, a nie któryś z pojedynczych pomiarów x_i . Dlatego niepewność standardową pomiaru wyznaczamy obliczając odchylenie standardowe $s_{\bar{x}}$ średniej $\bar{x}$, a nie odchylenie standardowe s_x pojedynczego pomiaru. **Odchylenie standardowe średniej** jest mniejsze niż odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru i wyraża się wzorem (65, Dodatek):

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \stackrel{\text{def}}{=} u(\bar{x}). \quad (2b)$$

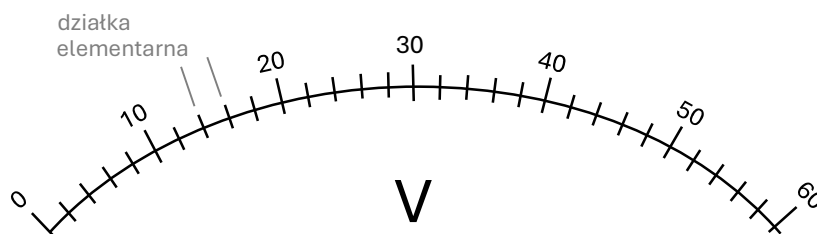
Stanowi ono **niepewność standardową** $u(\bar{x})$ obliczoną **metodą typu A**.

Powyższy wzór jest wyrazem faktu, że średnia $\bar{x}$, chociaż, tak jak wynik pojedynczego pomiaru, nie jest równa wartości prawdziwej, to jednak leży ona średnio bliżej wartości prawdziwej, niż pojedynczy pomiar.

1.2 Obliczanie niepewności standardowej metodą typu B

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru, lub gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową nie można obliczyć drogą analizy statystycznej i ocenia się ją na podstawie danych umieszczonych w specyfikacji przyrządu pomiarowego, wiedzy o danej wielkości fizycznej lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić. W laboratorium studenckim najprostsza metoda obliczania niepewności typu B polega na uwzględnieniu niepewności maksymalnej Δx , będącej połową szerokości przedziału, w jakim zmierzone wartości powinny się mieścić. Zazwyczaj przyjmuje się, że rozrzut wyników opisany jest rozkładem jednostajnym (Rysunek 10, rozdz. 8.2.1), a wtedy wartość Δx jest równa połowie szerokości rozkładu jednostajnego. Często niepewność maksymalna jest niepewnością wzorcowania, $\Delta x = \Delta x_w$, równą wartości działki elementarnej stosowanego miernika. W takim przypadku **niepewność standardowa typu B** będzie równa odchyleniu standardowemu rozkładu jednostajnego, wyznaczonego ze wzoru (61, Dodatek):

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$



Rysunek 1. Tarcza miernika analogowego o działce elementarnej $\Delta x = 2 \text{ V}$ i zakresie 60 V

W przypadku miernika o wyświetlaczu cyfrowym niepewność wzorcowania Δx należy przyjąć równą jednostce ostatniego miejsca na wyświetlaczu.

Innym sposobem określenia niepewności typu B jest obliczenie jej z klasy i zakresu miernika. Klasa podawana jest przez producenta na mierniku w procentach, a zakres pomiarowy jest maksymalną wartością możliwą do zmierzenia (Rysunek 1):

$$u(x) = \text{klasa} \cdot \text{zakres}. \quad (4)$$

Często powinien decydować zdrowy rozsądek – jeżeli używamy stopera o niepewności wzorcowania $\Delta t_w = 0,01 \text{ s}$, to jednak jako niepewność maksymalną należy przyjąć czas refleksu człowieka $\Delta t = 0,3 \text{ s}$. W laboratoriach naukowych powinno się jednak kierować danymi producenta dotyczącymi niepewności, umieszczonymi w dokumentacji przyrządu pomiarowego.

1.3 Obliczanie niepewności standardowej metodą typu AB

Jeżeli obydwa typy niepewności A i B występują równocześnie, należy postąpić się prawem składania niepewności, które prowadzi do następującej zależności na **niepewność standardową łączną**:

$$u(x) = \sqrt{(u_A(x))^2 + (u_B(x))^2}. \quad (5)$$

Z takim przypadkiem możemy mieć do czynienia, gdy dla tej samej niezmiennnej wielkości fizycznej dysponujemy serią pomiarów, z której wyznaczamy niepewność $u_A(x)$ metodą typu A, a dodatkowo przewidujemy wystąpienie błędu systematycznego, którego nie możemy wyeliminować podczas pomiarów, a którego wartość możemy jedynie oszacować metodą typu B jako niepewność $u_B(x)$.

Niewłaściwe jednak byłoby uwzględnienie za pomocą wzoru (5) niepewności typu B związanej z działką elementarną wg. wzoru (3), jeżeli odpowiada przypadkowym błędom odczytu, ponieważ ten błąd odzwierciedlił się (oprócz innych czynników) w rozrzucie zmierzonych wartości, co zostało już uwzględnione w niepewności $u_A(x)$ obliczonej metodą A.

Niepewność $u_B(x)$ dla błędu systematycznego dodajemy do niepewności $u_A(x)$ dla błędu przypadkowego za pomocą wzoru (5) typowego dla składania błędów przypadkowych. Jest to działanie właściwe, ponieważ błąd systematyczny, jeżeli jest nieznan, zawiera element przypadkowości. Jest on specyficzną zmienną losową, o czym poniżej.

Kwestię poruszoną w powyższym akapicie można zobrazować dokładniej na podstawie przykładowego pomiaru jednym miernikiem dwóch wielkości x_1 i x_2 jednego typu (np. dwóch odległości), a następnie dodaniu tych wielkości: $x = x_1 + x_2$. Obliczenie niepewności końcowej wielkości x z uwzględnieniem niepewności $u_A(x)$ dla błędów przypadkowych (pomiaru były wielokrotnie powtarzane) i niepewności $u_B(x)$ dla błędów systematycznych obu wielkości x_1 i x_2 musi zachodzić według wzoru $u(x) = \sqrt{[u_A(x_1)]^2 + [u_A(x_2)]^2 + [u_B(x_1) + u_B(x_2)]^2}$, ponieważ błędy systematyczne dwóch pomiarów jednym miernikiem są skorelowane (zgodne, dodają się). Gdyby jednak obie wielkości x_1 i x_2 były mierzone różnymi miernikami, to błędy systematyczne obu mierników byłyby nieskorelowane (niezależne, mogłyby się dodać lub odjąć), a zatem niepewność wielkości x : $u(x) = \sqrt{[u_A(x_1)]^2 + [u_A(x_2)]^2 + [u_B(x_1)]^2 + [u_B(x_2)]^2}$

2 Pomiary pośrednie

Nazwą pomiar pośredni wielkości fizycznej Y określamy sytuację, gdy najpierw mierzymy kilka pomocniczych odrębnych wielkości fizycznych X_j , a następnie docelową wielkość Y obliczamy z jakiegoś wzoru dzięki wielkościom X_j . Znaczy to, że w pomiarach pośrednich mierzona (obliczana) wielkość Y jest funkcją kilku wartości X_j , czyli $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_N)$, gdzie $j = 1, 2 \dots N$. Funkcja f wynika z fizycznego wzoru, wiążącego te wielkości. Jeżeli z wcześniejszych pomiarów znamy estymaty x_j (np. wartości średnie) wszystkich wielkości X_j oraz ich niepewności standardowe $u(x_j)$, to estymata y mierzonej pośrednio wielkości Y oraz jej niepewność standardowa $u(y)$ wyznacza się z zależności:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (6)$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_j) \right]^2} = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} u(x_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} u(x_2) \right]^2 + \dots} \quad (7)$$

Tak wyznaczona niepewność nazywa się **niepewnością złożoną** (ang. "combined"). Wzór (6) wyraża **prawo przenoszenia niepewności**.

W praktyce możemy mieć do czynienia z różnymi szczegółowymi przypadkami. Może się zdarzyć, że $N = 1$, czyli z jednej wielkości X obliczana jest jedna wielkość Y . Wtedy prawo to redukuje się do postaci

$$u(y) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| u(x).$$

Często też się zdarza, że pomiary pośrednie składają się piętno – wielkość Y_1 obliczana jest z kilku wielkości X_j , podobnie jest z wielkością Y_2 , a następnie z wielkości Y_1 i Y_2 obliczana jest Z . Należy wtedy po kolei stosować prawo przenoszenia niepewności (6) do obliczania Y_1 i Y_2 , a następnie do obliczenia Z .

Należy zaznaczyć, że prawo przenoszenia niepewności w postaci danej wzorem (6) jest słuszne tylko w przypadku, gdy pomiary są nieskorelowane, to znaczy gdy pomiar x_j dowolnej wielkości X_j nie zależy od pomiaru x_k dowolnej innej wielkości X_k . Choć wielkości X_j i X_k mogą być zależne (np. związane jakimś wzorem), to ważne jest, żeby błędy zmierzonych wartości x_j i y_k nie były zależne. Korelacja pomiędzy dwiema wielkościami wejściowymi X_j i X_k może wystąpić, jeżeli do ich wyznaczenia zastosowano ten sam przyrząd pomiarowy. Na przykład, jeżeli ten sam termometr jest używany do określenia poprawki temperaturowej w pomiarach tych dwóch wielkości, albo wtedy, gdy do pomiaru napięcia (X_j) i natężenia prądu (X_k) używany jest ten sam miernik uniwersalny. Również w przypadku, gdy bezpośrednio mierzone jest tylko natężenie $X_1 = I$, a napięcie $X_2 = U$ obliczane jest z prawa Ohma dzięki znajomości oporu wzorcowego i także tego natężenia $U = RI$. Jednak w sytuacji, gdy dwoma niezależnymi miernikami mierzy się napięcie i natężenie prądu przepływającego przez jeden opornik, to chociaż natężenie prądu zależne jest według prawa Ohma od napięcia, to błędy pomiarowe, a zatem i pomiary, należy uznać za nieskorelowane (chyba, że np. znaczący wpływ na oba mierniki ma zmieniająca się temperatura otoczenia).

Ponieważ uwzględnienie korelacji między mierzonymi wielkościami wykracza poza program I pracowni fizycznej, ćwiczenia laboratoryjne zostały tak zaprojektowane, aby wpływ korelacji był zminimalizowany. Jednak, na przykład przy stosowaniu metody najmniejszych kwadratów (rozdz. 7), nawet gdy mierzone wielkości są nieskorelowane, to obliczone z nich wartości współczynników najczęściej są skorelowane. Wtedy do obliczenia niepewności stosujemy metodę omówioną w rozdz. 7.4.

3 Przypadki szczególne

3.1 Wielokrotne pomiary tej samej wielkości z różnymi niepewnościami

W praktyce pomiarowej może zdarzyć się tak, że każdy pomiar x_i tej samej niezmienniej wielkości fizycznej X jest dokonywany z inną dokładnością, na przykład wtedy, gdy pomiary są wykonywane za pomocą różnych mierników, lub w trakcie pomiarów zmieniany jest zakres pomiarowy. Najczęściej na różnych zakresach mierniki mają różną niepewność, wyliczaną na przykład z działki elementarnej według wzoru (3). Załóżmy, że każdy pomiar x_i posiada inną niepewność $u(x_i)$. Wtedy zamiast zwykłej średniej arytmetycznej danej wzorem (1), należy obliczyć **średnią ważoną**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (8)$$

gdzie wagi w_i są odwrotnościami kwadratów niepewności standardowych:

$$w_i = \frac{1}{[u(x_i)]^2}. \quad (9)$$

Niepewność tak wyznaczonej średniej można obliczyć dzięki zastosowaniu prawa przenoszenia niepewności do wzoru (8), co daje:

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}}. \quad (10)$$

Czasami zdarza się, że nie jesteśmy pewni wartości poszczególnych niepewności $u(x_i)$, a znamy tylko ich stosunki. Taka sytuacja zachodzi, gdy na przykład wszystkie niepewności $u(x_i)$ zostały obliczone metodą przenoszenia z jednej „pierwotnej” niepewności $u(z)$, która została tylko wstępnie oszacowana. Wtedy na średnią ważoną nadal obowiązuje wzór (8), a niepewność średniej ważonej jest równa:

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n w_i}}. \quad (11)$$

Wzór (11) jest odbiciem metody obliczenia niepewności średniej ważonej z estymacją niepewności wejściowych. Znaczy to, że możemy dodatkowo wyznaczyć lepsze oszacowania (estymatory) wejściowych niepewności: $u'(x_i) = \kappa \cdot u(x_i)$, gdzie κ jest stosunkiem niepewności danych wzorem (11) i (10), czyli $\kappa = u_{(11)}(\bar{x})/u_{(10)}(\bar{x})$, a wejściowe niepewności $u(x_i)$ są jedynie wstępnym oszacowaniem.

3.2 Wielokrotne pomiary różnych wielkości z tą samą niepewnością

Może też zdarzyć się przypadek, że mamy do czynienia z m wielkościami fizycznymi jednego rodzaju, na przykład m różnych promieni szeregu koncentrycznych okręgów. Zakładamy, że każda z m wielkości mierzona jest n krotnie. Dlatego wszystkich pomiarów jest $N = m \cdot n$. Zakładamy też, że mimo iż mierzymy różne wielkości, każdy pomiar cechuje się jednakową niepewnością (np. używamy tego samego miernika). Oznaczmy przez $x_{i,j}$ j -ty wynik pomiaru i -tej wielkości, gdzie $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$.

Wtedy na podstawie serii wyników $x_{i,j}$ można obliczyć niepewność każdego z pojedynczych pomiarów:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{N - m}}, \quad (12)$$

gdzie $N = m \cdot n$, a $\bar{x}_i$ jest średnią wyników pomiarów w i -tej grupie (dla i -tej wielkości fizycznej). Każda różnica $x_{i,j} - \bar{x}_i$ obliczana jest tak, że od danego wyniku pomiaru $x_{i,j}$ odejmujemy średnią $\bar{x}_i$ właściwą dla i -tej grupy pomiarów, w której znajduje się dany pomiar.

Średnia $\bar{x}_i$ w każdej grupie pomiarów też cechuje się swoją niepewnością. Jest ona mniejsza niż niepewność pojedynczego pomiaru, co jest typowe dla powtarzających się pomiarów, i jest równa

$$u(\bar{x}_i) = \frac{u(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{n(N - m)}}. \quad (13)$$

Możliwy jest też przypadek podobny, ale bardziej ogólny, gdy, jak poprzednio, mierzonych wielkości fizycznych jest m (m grup pomiarów), ale w każdej grupie mamy do czynienia z inną liczbą pomiarów, oznaczmy te liczby jako n_i . Wtedy we wzorach (12) i (13) liczbę n należy zastąpić liczbą n_i , a liczba N jest równa sumie liczb n_i , czyli $N = \sum_{i=1}^m n_i$.

4 Obliczanie niepewności rozszerzonej

Chociaż niepewność standardowa $u(x)$ jest wygodną miarą niepewności związanej z błędami pomiarowymi, to nie przekazuje ona całej informacji o charakterze tych błędów. W szczególności, bez dodatkowych informacji nie wiadomo, jaki jest procent błędów w serii powtarzających się pomiarów, które mają wartość mniejszą niż $u(x)$. Ujmując dokładniej, nie wiadomo, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru x zawiera się w przedziale $[X - u(x), X + u(x)]$ dookoła wartości prawdziwej X . Często prawdopodobieństwo to nie jest bliskie jedności, czyli jest znaczące prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru x wykracza poza przedział $[X - u(x), X + u(x)]$. Dlatego sformułowano pojęcie niepewności rozszerzonej:

$$U(x) = k \cdot u(x), \quad (14)$$

gdzie k jest tak zwanym współczynnikiem rozszerzenia. Współczynnik ten dobiera się tak, aby prawdopodobieństwo P tego, że wynik pomiaru x mieści się w rozszerzonym przedziale $[X - U(x), X + U(x)]$ wokół wielkości prawdziwej X było bliskiej jedności. Stosując teorię wiarygodności (nie omówioną tutaj) możemy całą sytuację odwrócić. Możemy powiedzieć, że nieznaną wartość prawdziwą X zawiera się w przedziale $[x - U(x), x + U(x)]$ wokół wartości zmierzonej x z poziomem ufności p_a . Stopień ufności jest równy omówionemu prawdopodobieństwu P .

Podstawowym problemem w ocenie niepewności rozszerzonej jest określenie współczynnika rozszerzenia k . **Najprostszym sposobem**, dopuszczalnym w laboratorium studenckim, **jest przyjęcie współczynnika rozszerzenia k w zakresie od 2 do 3.**

Dokładny sposób wyznaczania współczynnika rozszerzenia zależy od tego, czy znamy rozkład prawdopodobieństwa mierzonej wielkości i jaką metodą dokonywany jest pomiar. Sposób ten jest omówiony w poniższych podrozdziałach.

4.1 Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą typu A, w przypadku gdy wyniki pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu.

Tak jak zawsze w tego typu pomiarach, średnią arytmetyczną $\bar{x}$ przyjmujemy jako końcowy wynik pomiaru, a estymator $s_{\bar{x}}$ (wzór (2b)), - jako niepewność standardową $u(x)$.

Jeżeli seria n pomiarów jest liczna ($n \geq 30$), to współczynnik rozszerzenia obliczamy tak, jak to podano w punkcie 8.4.2, czyli po założeniu poziomu ufności p_α , równego zazwyczaj 0,95 lub 0,99, z tablic standardowego rozkładu normalnego (Rysunek 13) odczytujemy wartość współczynnika rozszerzenia k dla danego p_α .

Jeżeli seria n pomiarów jest mało liczna ($n < 30$), to współczynnik rozszerzenia obliczamy tak, jak to podano w punkcie 8.4.3, czyli po założeniu poziomu ufności p_α , równego zazwyczaj 0,95 lub 0,99, z tablic rozkładu t-Studenta (Rysunek 14) odczytujemy wartość współczynnika rozszerzenia $k = t$, dla liczby stopni swobody ν . Gdy wynikiem pomiaru jest średnia arytmetyczna, liczba stopni swobody jest równa $\nu = n - 1$, a gdy wynik pomiaru otrzymany jest z metody najmniejszych kwadratów, liczba stopni swobody jest równa $\nu = n - r$, gdzie r jest liczbą parametrów krzywej dopasowania (rozdz. 7).

Podając przy wyniku pomiaru niepewność rozszerzoną $U(x)$, wyznaczoną ze wzoru (14), koniecznie trzeba zaznaczyć, z jakim poziomem ufności p_α została ona obliczona.

4.2 Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą typu B lub gdy nie jest znany rozkład prawdopodobieństwa wyników pomiarów.

W przypadku **gdy niepewność standardowa pomiaru bezpośredniego została obliczona na podstawie działki elementarnej**, wzór (3), czyli z założeniem jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa, **to niepewność rozszerzoną obliczamy przyjmując współczynnik rozszerzenia $k = \sqrt{3}$** . Jest to równoważne przyjęciu niepewności rozszerzonej równej wartości działki elementarnej (niepewności wzorowania): $U(x) = \Delta x$, czyli równoważne przyjęciu całego zakresu zmiennej losowej jako przedziału ufności. W takim przedziale prawdopodobieństwo znalezienia wyniku pomiaru podlegającego rozkładowi jednostajnemu jest równe jedności: $p_\alpha = 1$ (rozdz. 8.2.1).

Rozkład prawdopodobieństwa wyników pomiarów jest nieznany najczęściej wtedy, gdy niepewność standardową wyznaczono metodą typu B na podstawie niepełnych informacji zawartych w dokumentacji przyrządu pomiarowego, lub gdy posłużono się metodą typu AB. **Wtedy najprostszym sposobem jest przyjęcie a priori współczynnika rozszerzenia k w zakresie od 2 do 3**. Dla większości rozkładów prawdopodobieństwa, jakie mogą wystąpić w praktyce pomiarowej, takie wartości zapewniają bliskie jedności prawdopodobieństwa znalezienia się prawdziwej wartości mierzonej wielkości fizycznej w rozszerzonym przedziale ufności.

Podając przy wyniku pomiaru niepewność rozszerzoną $U(x)$, wyznaczoną ze wzoru (14), konieczne trzeba zaznaczyć, z jakim współczynnikiem rozszerzenia k została ona obliczona.

4.3 Obliczanie niepewności rozszerzonej w pomiarze pośrednim

Należy najpierw obliczyć niepewności standardowe $u(x_j)$ wszystkich wielkości fizycznych X_j składających się na wielkość końcową Y , następnie obliczyć złożoną niepewność standardową $u(y)$ metodą przenoszenia niepewności podaną w rozdz. 2 i dopiero na końcu obliczać niepewność rozszerzoną $U(y)$. Wymóg taki obowiązuje, ponieważ prawo przenoszenia dotyczy tylko niepewności standardowej, czyli nie istnieje ogólne prawo przenoszenia niepewności rozszerzonej.

Przy obliczaniu niepewności rozszerzonej $U(y)$ należy postąpić się współczynnikiem rozszerzenia przyjętym a priori w granicach od 2 do 3 (rozdz. 4.2), ponieważ w większości przypadków nie możemy wyznaczyć rozkładu prawdopodobieństwa wyniku pomiaru pośredniego lub jest to zbyt skomplikowane.

Tylko gdy wszystkie pomiary składowe x_j zostały dokonane metodą typu A, można postąpić się metodą z rozdz. 4.1 (rozkład t-Studenta), najpierw obliczając efektywną liczbę stopni swobody ν_e zgodnie z formułą Welcha-Satterwhite'a:

$$\nu_e = \frac{u^4(y)}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\nu_j} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_j} \right)^4 u^4(x_j)} \quad (15)$$

Jeżeli ν_e nie jest liczbą całkowitą, zaokrąglamy ją do najbliższej liczby całkowitej, dla pewności zawsze w dół.

5 Ogólne zasady dotyczące rachunku niepewności

5.1 Zasady zaokrąglania liczb

Cyframi znaczącymi danej liczby różnej od zera nazywamy wszystkie jej cyfry z wyjątkiem występujących na początku i na końcu zer.

0,00003080 – 3 cyfry znaczące, 3080000 – 3 cyfry znaczące.

Do cyfr znaczących zalicza się również zera końcowe, jeśli są one wynikiem pomiarów lub obliczeń:

0,00003080 – 4 cyfry znaczące, jeżeli ostatnie zero jest wynikiem pomiarów lub obliczeń i dlatego niesie ono istotną informację. Pierwsza cyfra znacząca musi być różna od zera, natomiast druga i dalsze mogą być zerami. Liczby cyfr znaczących nie należy mylić z liczbą cyfr po przecinku.

Zaokrąglanie liczb w trakcie obliczeń pośrednich

Przy zaokrąglaniu wyników obliczeń pośrednich należy kierować się trzema zasadami:

- w dokładności wyniku liczą się jego cyfry znaczące, a nie cyfry po przecinku;
- obowiązuje zasada najśłabszego ogniwa w łańcuchu; znaczy to, że np. jeżeli jeden ze składników działania posiada 3 cyfry znaczące, a drugi – 4 cyfry znaczące, to wynik podajemy z dokładnością 3 cyfr znaczących;

– do tak zaokrąglonego wyniku dodajemy jedną lub dwie cyfry „na zapas”; chodzi o to, żeby w trakcie wielu obliczeń zmniejszyć kumulowanie się błędów wynikających z zaokrągleń.

Zaokrąglanie wyników końcowych

Właściwych zaokrągleń dokonujemy dopiero po zakończeniu wszystkich obliczeń:

- najpierw zaokrąglamy niepewność wyniku, a potem sam wynik;
- niepewność należy zaokrąglać do dwóch cyfr znaczących;
- ostatnia cyfra znacząca w wyniku powinna stać na tym samym miejscu dziesiętnym, co ostatnia cyfra w zaokrąglonej niepewności (przykład w rozdz. 5.2.1).

Przy zaokrąglaniu wyniku pomiaru i niepewności stosuje się powszechnie przyjęte zasady zaokrągleń:

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr to $0 \div 4$, to liczbę zaokrąglamy w dół, a jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr to $5 \div 9$, to liczbę zaokrąglamy w górę. Jeżeli jednak pierwsza z odrzucanych cyfr jest równa 5 i nie ma dalszych cyfr lub wszystkie są równe 0, to liczbę zaokrąglamy w górę lub w dół tak, żeby ostatnia pozostawiona cyfra była parzysta.

5.2 Podawanie niepewności

Załóżmy, że zmierzona masa wynosi $m = 1,02142$ kg, a niepewność standardowa $u(m) = 0,35$ g. Niepewność standardową razem z wynikiem pomiaru zapisujemy w jednej z następujących form:

$$m = 1,02142 \text{ kg}, u(m) = 0,00035 \text{ kg}$$

$$m = 1,02142(35) \text{ kg}$$

Niepewność rozszerzoną $U(m) = k \cdot u(m) = 3 \cdot 0,35 \approx 1,1$ g razem z wynikiem pomiaru zapisujemy w formie:

$$m = (1,0214 \pm 0,0011) \text{ kg}$$

Zauważmy, że niepewność podawana jest w tych samych jednostkach, co wynik pomiaru.

5.2.1 Przykłady zaokrąglania wyników pomiaru

Załóżmy, że uzyskana w wyniku obliczeń masa wynosi $m = 0,02145$ kg, a niepewność rozszerzona $U(m) = 3,751 \text{ g} = 0,003751 \text{ kg}$. Najpierw zaokrąglamy niepewność do dwóch cyfr znaczących, co daje $U(m) = 0,0038 \text{ kg}$. Następnie zaokrąglamy wynik pomiaru tak, żeby ostatnia cyfra znacząca stała na tym samym miejscu dziesiętnym, co ostatnia cyfra znacząca w niepewności pomiaru, czyli tutaj do czterech cyfr po przecinku, co daje $m = 0,0214 \text{ kg}$. Razem wynik zapiszemy jako:

$$m = (0,0214 \pm 0,0038) \text{ kg} \text{ lub jeszcze lepiej:}$$

$$m = (21,4 \pm 3,8) \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Poniższe zaokrąglenia, jakkolwiek formalnie poprawne, są fizycznie niepoprawne:

$$m = (0,0214 \pm 0,00375) \text{ kg} \text{ źle}$$

$$m = (0,02145 \pm 0,0038) \text{ kg} \text{ źle}$$

$$m = (0,021 \pm 0,0038) \text{ kg} \text{ źle}$$

Jeżeli uzyskana w wyniku obliczeń masa wynosi na przykład $m = 0,32$ kg, a niepewność rozszerzona $U(m) = 0,00375$ kg, to wyniku tego nie da się zaokrąglić, ponieważ masę m obliczano z za małą liczbą cyfr znaczących w porównaniu z niepewnością, prawdopodobnie z powodu zbyt dużego zaokrąglenia jakiejś wielkości, z której ta masa była obliczana. Wtedy obliczenia należy powtórzyć.

5.3 Porównywanie wielkości fizycznych

W praktyce często występuje przypadek, że chcemy porównać wynik pomiaru pewnej wielkości fizycznej z jej wartością tablicową. Często też porównujemy ze sobą dwa wyniki pomiarów jednej wielkości fizycznej, jeżeli oba pomiary zostały wykonane różnymi sposobami. Oznaczmy oba wyniki pomiarów jako T_1 i T_2 , a ich niepewności rozszerzone – jako $U(T_1)$ i $U(T_2)$.

W celu porównania obu wartości najlepiej jest utworzyć ich różnicę $T_1 - T_2$ i stwierdzić, czy jest ona duża, czy mała. Jednak w nauce i technice stwierdzenie typu „różnica $T_1 - T_2$ jest mała” jest gołostowne, jeżeli nie porównamy jej z czymś. Dlatego proponuje się następującą procedurę:

Jeżeli różnica dwóch mierzonych wielkości jest mniejsza niż niepewność rozszerzona tej różnicy, to można uznać, że te dwie wielkości są sobie równe (dokładniej – pomiar nie wykazał ich różnicy):

Niepewność rozszerzoną różnicy można obliczyć dzięki prawu przenoszenia niepewności:

$$U(T_1 - T_2) = k u(T_1 - T_2) = k \cdot \sqrt{\left[\frac{\partial(T_1 - T_2)}{\partial T_1} u(T_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial(T_1 - T_2)}{\partial T_2} u(T_2)\right]^2} = k \cdot \sqrt{[u(T_1)]^2 + [u(T_2)]^2}$$

Dlatego stwierdzamy, że pomiar nie wykazał różnicy dwóch wielkości, gdy

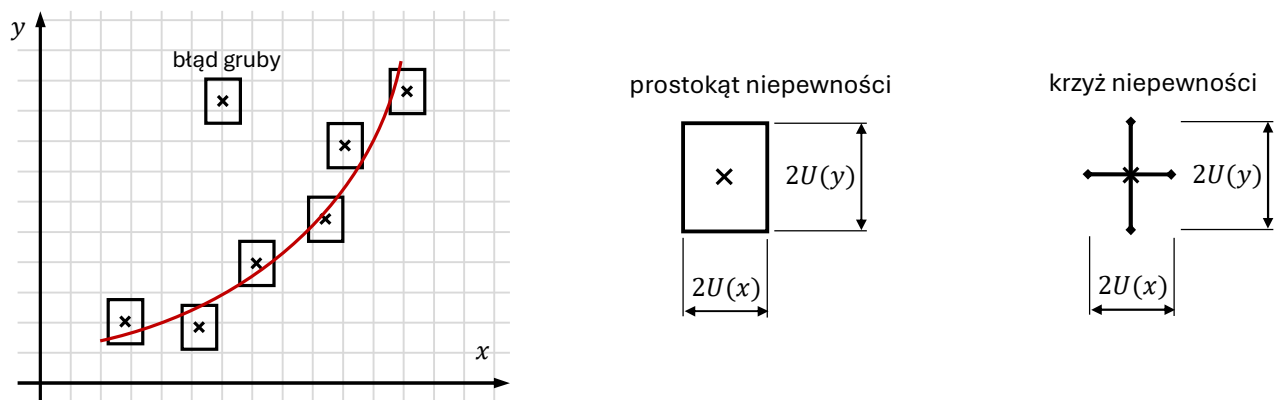
$$|T_1 - T_2| < k \cdot \sqrt{[u(T_1)]^2 + [u(T_2)]^2} \quad (16)$$

gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia (rozdz. 4).

W przypadku, gdy T_2 jest wartością znalezioną w tablicy, można przyjąć, że wartość ta została podana z niepewnością dużo mniejszą, niż niepewność $u(T_1)$ naszego pomiaru, czyli można przyjąć, że $u(T_2) = 0$.

5.4 Graficzne przedstawienie wyników pomiarów i niepewności

Wyniki pomiarów dwóch zmieniających się wielkości fizycznych można przedstawić na wykresie. Pary odpowiadających sobie wielkości fizycznych (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ... nanosimy na płaszczyznę z wybranym układem współrzędnych i otrzymujemy szereg punktów doświadczalnych zaznaczonych w postaci małych znaczników (kwadratów, kropek, iksów lub krzyżyków). Ponieważ położenia tych punktów są obciążone niepewnością pomiarową, należy ten fakt uwzględnić na wykresie. Współrzędne punktu pomiarowego, z uwzględnieniem niepewności rozszerzonych, można zapisać w postaci: $(x \pm U(x), y \pm U(y))$. Oznacza to, że rzeczywista wartość odciętej x mieści się w przedziale od $x - U(x)$ do $x + U(x)$, a rzędnej – w przedziale od $y - U(y)$ do $y + U(y)$. Zaznaczenie tych przedziałów na wykresie (w kartezjańskim układzie współrzędnych) jest równoważne z otoczeniem punktu pomiarowego prostokątem o bokach $2U(x)$ i $2U(y)$, zwanym prostokątem niepewności (Rysunek 2). Niepewność rozszerzoną U należy obliczać według wskazówek podanych w rozdz. 4.



Rysunek 2. Graficzne zaznaczanie punktów pomiarowych, prostokątów niepewności i krzywej doświadczalnej

Krzywą doświadczalną należy wykreślać tak, żeby była możliwie gładką krzywą niekoniecznie przechodzącą przez punkty pomiarowe. Najczęściej znamy z teorii jej rodzaj (prosta, parabola, hiperbola lub krzywa wykładnicza), a wtedy linię należy wykreślić zgodnie z tym rodzajem. Jeżeli krzywa została wyznaczona z metody najmniejszych kwadratów, to należy wyznaczyć dokładne jej położenie, korzystając z obliczonych parametrów krzywej.

Czasami zdarza się, że jeden punkt pomiarowy (rzadziej kilka) znacznie odbiega od przewidywanego przebiegu krzywej. Najczęściej oznacza to, że podczas pomiaru został popełniony „błąd gruby”, czyli że pewne czynniki, nieprzewidziane przez prowadzącego pomiar i nieuwzględnione w podstawach teoretycznych pomiaru (np. nagły wstrząs), znacząco wpłynęły na jego wynik. Pomiar taki należy odrzucić. Istnieje ścisła teoria, z której wynika, kiedy należy to zrobić, jednak w praktyce I pracowni fizycznej wystarczy następująca wizualna ocena: pomiar odrzucamy, jeżeli pomiędzy jego prostokątem niepewności a krzywą zmieści się jeszcze jeden taki prostokąt.

Pomocne mogą być także szczegółowe wskazówki na temat wykresów:

- Wykres powinien być rysowany na papierze milimetrowym, z wyjątkiem wykresów konstruowanych z użyciem komputera, ale wtedy należy także wykreślić gęstą siatkę (szarą) i prostokąty (krzyże) niepewności.
- Na wykresie powinien znajdować się podpis (może być umieszczony u góry arkusza) w stylu: „Wykres zależności natężenia prądu stałego od napięcia przyłożonego do cewki”.
- Przy osi powinno znajdować się jej oznaczenie, czyli symbol wielkości fizycznej wraz z jednostką, według schematu: „ x [cm]” lub „ x , cm” ; wielkości fizyczne piszemy kursywą, a ich jednostki pismem prostym.
- Skale na osiach muszą być tak dobrane, żeby wykres zajął jak największą część arkusza. W przypadku rysowania na papierze milimetrowym nie należy jednak stosować niewygodnych skali o stosunku jednostki fizycznej do 1 cm równym 1:3, 3:1, 1:6, 6:1, 1:7, 7:1 itp.
- Zero nie musi być w początku układu współrzędnych, jeżeli pozwoli to znacząco lepiej wykorzystać arkusz.
- Liczby zaznacza się na osi w równych odstępach, co znaczy też, że na osi nie zaznaczamy współrzędnych punktów pomiarowych.

6 Przykład problemu metrologicznego z rozwiązaniem

Aby ocenić wartość natężenia prądu stałego I będącego sumą statych prądów I_1 i I_2 , wykonano dwie serie pomiarów prądów I_1 i I_2 dwoma identycznymi amperomierzami. Otrzymano następujące wyniki w amperach: $I_1 = (5.1; 4.6; 4.8; 4.5; 4.6; 4.8;)$ A oraz $I_2 = (9.5; 9.2; 9.8; 9.1; 9.7; 9.3)$ A. Dla poziomu ufności $p_\alpha = 0.99$ należy ocenić niepewność rozszerzoną pomiaru i zapisać wynik. Zakładamy, że błędy metody można pominąć. Obliczamy wartości średnie prądów:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{1i} = \frac{28,4 \text{ A}}{6} = 4,73 \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{2i} = \frac{56,6 \text{ A}}{6} = 9,43 \text{ A}$$

oraz niepewności standardowe typu A, ponieważ dysponujemy serią pomiarów nie zmieniających się wielkości fizycznych (rozdz. 1.1):

$$u_A(I_1) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_{1i} - \bar{I}_1)^2} = \sqrt{\frac{0,2334 \text{ A}^2}{30}} = 0,0882 \text{ A}$$

$$u_A(I_2) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_{2i} - \bar{I}_2)^2} = \sqrt{\frac{0,3934 \text{ A}^2}{30}} = 0,1145 \text{ A}$$

Działka elementarna mierników wynosi $\Delta I = 0.1 \text{ A}$ (co widać też z wyników pomiarów). Niewłaściwe byłoby jednak zaliczenie tutaj jej wpływu do błędów przypadkowych, chociaż błąd odczytu związany z tą działką jest przypadkowy, ponieważ ten błąd odzwierciedlił się (oprócz innych czynników) w rozrzucie zmierzonych wartości, co zostało już uwzględnione w powyższej metodzie A.

Do uwzględnienia została jeszcze niepewność związana z błędem systematycznym miernika, którą obliczamy metodą typu B (rozdz. 1.2). Z dwóch omówionych tam sposobów wybieramy obliczenie z działki:

$$u_B(I_1) = u_B(I_2) = \frac{\Delta I}{\sqrt{3}} = \frac{0,1 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 0,0577 \text{ A}$$

Obie niepewności należy połączyć, obliczając niepewności standardowe łączne typu AB (rozdz. 1.3):

$$u(I_1) = \sqrt{u_A^2(I_1) + u_B^2(I_1)} = \sqrt{(0,0882^2 + 0,0577^2) \text{ A}^2} = 0,1054 \text{ A}$$

$$u(I_2) = \sqrt{u_A^2(I_2) + u_B^2(I_2)} = \sqrt{(0,1145^2 + 0,0577^2) \text{ A}^2} = 0,1282 \text{ A}$$

Obliczamy teraz wielkość mierzoną pośrednio – sumaryczny prąd I :

$$I = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 4,73 \text{ A} + 9,43 \text{ A} = 14,16 \text{ A}$$

oraz jego niepewność standardową metodą przenoszenia niepewności (rozdz. 2):

$$u(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial I_1}\right)^2 u^2(I_1) + \left(\frac{\partial I}{\partial I_2}\right)^2 u^2(I_2)} = \sqrt{1^2 \cdot (0,1054 \text{ A})^2 + 1^2 \cdot (0,1282 \text{ A})^2} = 0,1660 \text{ A}$$

Zwróćmy uwagę, że ostatnie zero jest cyfrą znaczącą i należy je pisać, bo zdecydowaliśmy się na etapie obliczeń wszystkie wyniki zaokrąglać do czterech cyfr znaczących.

Teraz można wyliczyć niepewność rozszerzoną w pomiarze pośrednim (rozdz. 4.3). Jediną prostą metodą jest w tym przypadku rozszerzenie niepewności standardowej na podstawie arbitralnie przyjętego współczynnika rozszerzenia $k = 3$, odpowiadającego w przybliżeniu poziomowi ufności $p_\alpha = 0,99$:

$$U(I) = ku(I) = 3 \cdot 0,1660 \text{ A} = 0,4980 \text{ A}$$

Ostateczny zapis wyniku po zaokrągleniu (rozdz. 5.2) jest następujący:

$$I = (14,16 \pm 0,50) \text{ A} \quad \text{dla współczynnika rozszerzenia } k = 3$$

W wielu przypadkach można zastosować uproszczoną metodę oceny niepewności całkowitej, opartą na centralnym twierdzeniu granicznym, z którego wynika, że gdy jego założenia są w przybliżeniu spełnione (duża liczba składowych pomiarów), możemy złożenie składowych rozkładów prawdopodobieństwa przybliżyć rozkładem normalnym. A ponieważ w I pracowni fizycznej zazwyczaj próby są mało liczne, ocenę niepewności całkowitej można uzyskać stosując współczynnik rozszerzenia t o wartościach dobieranych z tablic rozkładu t-Studenta dla założonego poziomu ufności p_α i liczbie efektywnych stopni swobody liczonej ze wzoru (15).

7 Metoda najmniejszych kwadratów

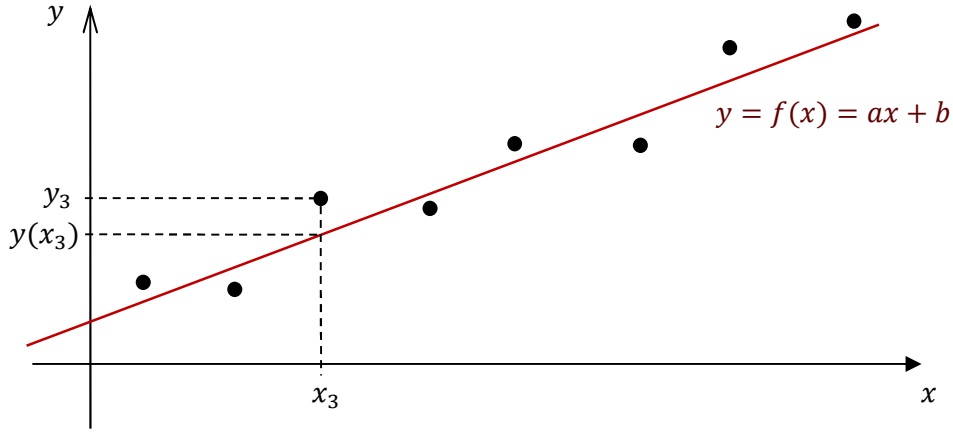
W rozdz. 2 dysponowaliśmy serią różnych wyników pomiaru, ale mierzona wielkość fizyczna była niezmienna, a różne wyniki otrzymano na skutek występowania innych za każdym razem błędów pomiarowych. W tym rozdziale zakładamy, że wielkość fizyczna x zmienia się w trakcie wykonywania pomiarów. Co więcej, przedmiotem pomiaru jest także druga wielkość fizyczna y , zależna od x , a więc także zmieniająca się. Zależność tę możemy wyrazić jako $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją o znanej postaci (np. liniowa, kwadratowa), wynikającą z teorii fizycznej, zawierającą jednak nieznanne parametry. Celem metody najmniejszych kwadratów jest wyznaczenie tych nieznananych parametrów. Wynik takiego dopasowania wartości parametrów do punktów pomiarowych zależy od postaci funkcji dopasowującej.

7.1 Wielkości liniowo zależne

Założmy, że przedmiotem pomiaru były dwie wielkości x i y zależne liniowo, a więc spełniające zależność funkcyjną:

$$y = ax + b \tag{17}$$

Obrazem graficznym tej zależności jest linia prosta o nachyleniu a , przecinająca oś rzędnych w punkcie b . Współczynniki a i b są wielkościami mającymi fizyczne znaczenie i jednostkę.



Rysunek 3. Dopasowanie linii prostej do punktów pomiarowych. Zaznaczono zmierzone współrzędne x_3 i y_3 jednego z punktów pomiarowych oraz teoretyczną wartość $y(x_3)$

Wykonaliśmy n pomiarów, otrzymując n par wyników (x_i, y_i) . Tutaj rozważamy tylko taki przypadek, że wielkość x jest mierzona dokładnie, natomiast druga wielkość jest obarczona jednakowym dla wszystkich y błędem pomiaru podlegającym normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Dlatego wyznaczone z równania (17) wartości $y(x_i)$ dla każdego x_i , czyli:

$$y(x_i) = ax_i + b \quad (18)$$

nie są dokładnie równe wartościom y_i uzyskanym z pomiarów, co zapisujemy jako $y(x_i) \neq y_i$. Rozbieżność tych wartości dla danego punktu, czyli odchylenie:

$$y(x_i) - y_i = ax_i + b - y_i, \quad (19)$$

jest równe błędowi pomiarowemu, posiadającemu z założenia rozkład normalny. Jego wartości z natury nie znamy, tak jak nie znamy prawdziwych wartości parametrów a i b . Te prawdziwe wartości parametrów można jedynie estymować (szacować) i dlatego oznaczamy ich estymatory symbolami $\bar{a}$ i $\bar{b}$. Estymatory te wyznaczymy z postulatu Gaussa, czyli z żądania, żeby suma kwadratów odchyłeń analogicznych do odchyłeń (19):

$$\bar{y}(x_i) - y_i = \bar{a}x_i + \bar{b} - y_i, \quad (20)$$

rozciągnięta na wszystkie pomiary miała wartość minimalną, czyli:

$$\sum_{i=1}^n [\bar{y}(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)^2 = \min. \quad (21)$$

Powyższy postulat Gaussa ma uzasadnienie w statystycznej metodzie największej wiarygodności. Warunek ten będzie spełniony, jeśli pochodne cząstkowe wyrażenia (21), liczone względem niewiadomych $\bar{a}$ i $\bar{b}$, będą równocześnie równe zero. Otrzymamy wówczas układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2x_i(\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

z którego możemy wyliczyć $\bar{a}$ i $\bar{b}$:

$$\bar{a} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (23a)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum y_i}{n} - \bar{a} \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (23b)$$

Z prawa przenoszenia niepewności można udowodnić, że niepewności standardowe estymatorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wyrażają się wzorami:

$$u(\bar{a}) = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (24a)$$

$$u(\bar{b}) = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (24b)$$

gdzie $\bar{\sigma}$ jest estymatorem jednakowych odchytek standardowych zmierzonych wartości y_i i wynosi:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{a} x_i + \bar{b} - y_i)^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \bar{a} \sum x_i y_i - \bar{b} \sum y_i}{n - 2}}. \quad (25)$$

Prostą o parametrach $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywamy „linią teoretyczną” i jest ona rezultatem najlepszego dopasowania do wyników pomiarów. Ważne jest to, że parametrów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nie musimy określać na podstawie wykresu, z czym mogą być związane błędy, lecz obliczamy je wprost z rezultatów doświadczenia. Jeżeli punkty pomiarowe nanosimy w układzie współrzędnych (bez łączącej je linii), należy także narysować linię teoretyczną, posługując się wyznaczonymi parametrami.

7.2 Wielkości proporcjonalne

Założmy, że przedmiotem pomiaru były dwie zmienne wielkości x i y zależne proporcjonalnie, a więc spełniające zależność funkcyjną:

$$y = ax \quad (26)$$

Obrazem graficznym tej zależności jest linia prosta o nachyleniu a , przechodząca przez środek układu współrzędnych (a jest wielkością mającą fizyczne znaczenie i jednostkę).

Wykonaliśmy n pomiarów, otrzymując n par wyników (x_i, y_i) . Tutaj rozważamy tylko taki przypadek, że wielkość x jest mierzona dokładnie, natomiast druga jest obarczona jednakowym dla wszystkich y błędem pomiaru podlegającym normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Postępując analogicznie jak w punkcie 7.1, czyli podstawiając odchylenie

$$\bar{y}(x_i) - y_i = \bar{a} x_i - y_i \quad (27)$$

do warunku Gaussa, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n [\bar{y}(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{a} x_i - y_i)^2 = \min \quad (28)$$

Aby warunek ten był spełniony, pochodna liczona względem niewiadomej $\bar{a}$ musi być równa zero:

$$\sum_{i=1}^n 2x_i(\bar{a}x_i - y_i) = 0 \quad (29)$$

z czego otrzymujemy:

$$\bar{a} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (30)$$

Niepewność standardowa estymatora $\bar{a}$, otrzymana z prawa przenoszenia niepewności, wyraża się wzorem:

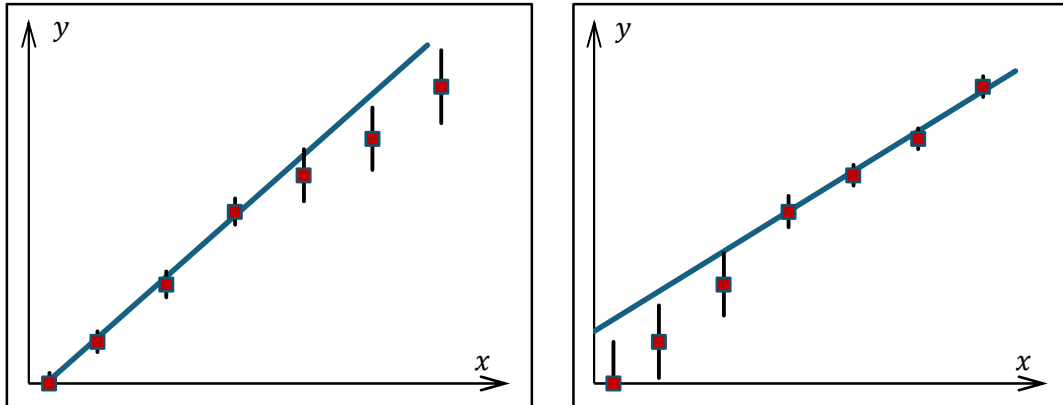
$$u(\bar{a}) = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \quad (31)$$

gdzie $\bar{\sigma}$ jest estymatorem jednakowych odchytek standardowych zmierzonych wartości y_i i wynosi:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{a}x_i - y_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \bar{a} \sum x_i y_i}{n-1}} \quad (32)$$

7.3 Ważona metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów (skrót MNK), dla dopasowania prostej omówiona w dwóch powyższych rozdziałach, zakłada, że niepewności $u(y)$ dla wszystkich punktów pomiarowych są sobie równe. Jeżeli jednak te niepewności nie są równe, należy użyć tzw. ważonej metody najmniejszych kwadratów. Efekt jej działania dla dopasowania prostej przedstawia Rysunek 4. Widać, że w każdym z dwu przypadków prosta jest lepiej dopasowana do tych punktów, które charakteryzują się małymi niepewnościami $u(y)$. Niepewności te zaznaczone są na rysunku dla każdego punktu jako pionowe linie o wysokości $2u(y)$.



Rysunek 4. Dopasowanie linii prostej do punktów. Punkty są takie same na obu rysunkach.

- a. małe niepewności dla pierwszych czterech punktów
- b. małe niepewności dla ostatnich czterech punktów

Najpierw oblicza się tak zwane wagi punktów:

$$w_i = \frac{1}{u(y_i)^2} \quad (33)$$

W przypadku, gdy oryginalną relacją do odtworzenia jest zależność liniowa $y = ax + b$, zadaniem MNK jest znalezienie współczynników a i b prostej i ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$. Dla ważonej MNK wzory podano poniżej.

$$a = \frac{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i y_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (34)$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i - a \sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \text{lub} \quad b = \frac{\sum w_i y_i \cdot \sum w_i x_i^2 - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (35)$$

$$u(a) = \kappa \cdot \sqrt{\frac{\sum w_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}} \quad u(b) = \kappa \cdot \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}} \quad (36)$$

$$\text{gdzie} \quad \kappa = \sqrt{\frac{\sum w_i (a x_i + b - y_i)^2}{n - 2}} \quad \text{lub} \quad \kappa = \sqrt{\frac{\sum w_i y_i^2 - a \sum w_i x_i y_i - b \sum w_i y_i}{n - 2}} \quad (37)$$

Gdy oryginalną relacją do odtworzenia jest zależność proporcjonalna $y = ax$, zadaniem MNK jest znalezienie współczynnika a prostej i jego niepewności $u(a)$. Dla ważonej MNK wzory podano poniżej:

$$a = \frac{\sum w_i x_i y_i}{\sum w_i x_i^2}, \quad u(a) = \frac{\kappa}{\sqrt{\sum w_i x_i^2}}, \quad (38)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\sum w_i (a x_i - y_i)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum w_i y_i^2 - a \sum w_i x_i y_i}{n - 1}} \quad (39)$$

Interpretacja współczynnika κ .

Przy standardowym założeniu, że „prawdziwe” wielkości x i y (nie ich wartości zmierzone) są związane ze sobą ścisłą zależnością liniową, możemy wyznaczyć lepsze oszacowania niepewności pomiarowych: $u'(y_i) = \kappa \cdot u(y_i)$. Znaczy to, że wejściowe niepewności $u(y_i)$ są jedynie wstępnym oszacowaniem.

7.4 Obliczanie wartości y na podstawie wyznaczonych parametrów a i b prostej

Czasami mamy do czynienia z następującą procedurą. Najpierw, tak jak w rozdziale 7.1, na podstawie n punktów pomiarowych (x_i, y_i) obliczamy współczynniki a i b prostej za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Tak wyznaczona zależność $y = ax + b$ będzie nam potem służyła do obliczania wielkości y ze znanej wielkości x . I właśnie później, za pomocą odrębnego pomiaru, mierzymy wielkość x_o z niepewnością $u(x_o)$ i obliczamy wielkość $y_o = ax_o + b$. Problemem jest teraz obliczenie niepewności $u(y_o)$.

Do tego celu nadaje się metoda przenoszenia niepewności (rozdz. 2), która z niepewności $u(x_o)$, $u(a)$ i $u(b)$ pozwoli wyliczyć $u(y_o)$ dzięki równaniu prostej. Jednak ponieważ wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów współczynniki a i b są skorelowane, to $u(y_o)$ należy obliczać z uwzględnieniem tej korelacji:

$$u(y_o) = \sqrt{\left[\frac{\partial y_o}{\partial x_o} u(x_o)\right]^2 + \left[\frac{\partial y_o}{\partial a} u(a)\right]^2 + \left[\frac{\partial y_o}{\partial b} u(b)\right]^2 + 2r \frac{\partial y_o}{\partial a} \frac{\partial y_o}{\partial b} u(a) u(b)} \quad (40)$$

gdzie r jest współczynnikiem korelacji współczynników a i b (nie współczynnikiem korelacji prostej) obliczanym przez „zwykłą” metodę najmniejszych kwadratów lub metodę ważoną jako

$$r = -\frac{\sum x_i}{\sqrt{n \sum x_i^2}}, \quad \text{lub} \quad r = -\frac{\sum w_i x_i}{\sqrt{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2}} \quad (41)$$

Oczywiście, jeżeli została użyta metoda najmniejszych kwadratów z prostą proporcjonalną $y = ax$, to należy przyjąć $u(b) = 0$ i $r = 0$.

7.5 Wielkości podlegające zależności kwadratowej

Założmy, że przedmiotem pomiaru były dwie wielkości x i y podlegające zależności kwadratowej, a więc spełniające zależność funkcyjną, której obrazem graficznym jest parabola:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (42)$$

Współczynniki a , b i c są wielkościami mającymi fizyczne znaczenie i jednostkę.

Wykonaliśmy n pomiarów, otrzymując n par wyników (x_i, y_i) . Tutaj rozważamy tylko taki przypadek, że wielkość x jest mierzona dokładnie, natomiast druga, czyli y , jest obarczona jednakowym błędem pomiaru podlegającym normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Postępując analogicznie jak w rozdziale 7.1, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} n \cdot c + \sum x_i \cdot b + \sum x_i^2 \cdot a = \sum y_i \\ \sum x_i \cdot c + \sum x_i^2 \cdot b + \sum x_i^3 \cdot a = \sum y_i x_i \\ \sum x_i^2 \cdot c + \sum x_i^3 \cdot b + \sum x_i^4 \cdot a = \sum y_i x_i^2 \end{cases} \quad (43)$$

z którego należy wyznaczyć nieznane współczynniki a , b i c . Zamiast wzorów analitycznych, wygodnie jest obliczyć wartości sum $\sum x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i^3$, $\sum x_i^4$, $\sum y_i$, $\sum y_i x_i$, $\sum y_i x_i^2$ i numerycznie rozwiązać układ równań.

Niepewności standardowe współczynników a , b i c , otrzymane z prawa przenoszenia niepewności, wyrażają się wzorami:

$$u(a) = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{W}}, \quad (44)$$

$$u(b) = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{n \sum x_i^4 - (\sum x_i^2)^2}{W}}, \quad (45)$$

$$u(c) = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}{W}}, \quad (46)$$

gdzie $\bar{\sigma}$ jest estymatorem jednakowych odchytek standardowych mierzonych wartości y_i i wynosi:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2}{n - 3}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - a \sum x_i^2 y_i - b \sum x_i y_i - c \sum y_i}{n - 3}}, \quad (47)$$

a W jest wyznacznikiem głównym układu równań (43):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} \quad (48)$$

7.6 Przykład praktyczny – dopasowanie krzywej teoretycznej do punktów pomiarowych

W celu określenia masy ciał na stacji orbitalnej, gdzie zwykła waga nie działa, zaprojektowano urządzenie, które dokonuje pomiaru siły działającej na dane ciało oraz przyspieszenia uzyskanego przez to ciało na to skutek działania siły. Masa ciała obliczana jest następnie z II zasady dynamiki Newtona:

$$F = m a$$

Wykonanie pomiarów za pomocą tego urządzenia może służyć w pracowni fizycznej do sprawdzenia słuszności II zasady dynamiki. Powyższy wzór stanowi zapis proporcjonalnej zależności między siłą i przyspieszeniem, a masa ciała pełni w nim rolę współczynnika proporcjonalności. Graficznym obrazem tego równania jest linia prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć, stosując metodę najmniejszych kwadratów, dla przypadku wielkości proporcjonalnych (rozdz. 7.2). W tym celu urządzeniem tym dokonano serii pomiarów dla różnych wartości działającej siły i uzyskano następujące wyniki:

F [N]	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
a [m/s ²]	0,26	0,90	1,41	1,51	1,64	2,59	2,60	3,36	3,41	3,51

Niepewności rozszerzone (obliczone metodą z rozdz. 4.1) dla siły i przyspieszenia wynoszą $U(F) = 0,35$ N, $U(a) = 0,08 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Metodę najmniejszych kwadratów można zastosować tak, jak to opisano w rozdz. 7.2, przyjmując $x \equiv a$, $y \equiv F$ i $A \equiv m$ we wzorze (26) wyrażającym powyższą proporcjonalność, co daje:

$$x = A y,$$

Współczynnik A i jego niepewność standardową można obliczyć ze wzorów (30)÷(32).

Metoda najmniejszych kwadratów jest także zaimplementowana w popularnych programach komputerowych, na przykład Excel, Open Office Calc, Origin, Mathcad, Matlab, Statistica. W przypadku omawianym tutaj, czyli dopasowania prostej do punktów pomiarowych, nosi ona nazwę regresji liniowej. Przykład obliczeń za pomocą programu Excel jest przedstawia Rysunek 1. W tabeli 1, widocznej w oknie programu, zawarte są powyższe wyniki pomiarów, a w tabeli 2 – wyniki obliczeń metodą najmniejszych kwadratów. Do obliczeń zastosowano funkcję REGLINP, widoczną w okienku edycyjnym o nazwie „f_x” u góry. Dwoma początkowymi parametrami tej funkcji, oddzielonymi średnikami, są zakresy danych pomiarowych: B2:B11 oznacza zakres komórek zmiennej y , A2:A11 oznacza zakres komórek zmiennej x . W omawianym przypadku jako wartość trzeciego parametru tej funkcji należy wpisać 0, co oznacza, że wymuszamy przyjęcie $B=0$ w równaniu prostej $x = Ay + B$. Jeżeli czwarty parametr jest równy 1, to wynikiem funkcji REGLINP jest tabela (na rys. tabela 2), która oprócz wartości A i B umieszczonych w pierwszym wierszu zawiera także

dodatkowe wyniki obliczeń, a wśród nich – wartości niepewności standardowych $u(A)$ i $u(B)$, umieszczone w drugim wierszu tabeli. Tabelę 2 z wynikami obliczeń otrzymujemy po zaznaczeniu odpowiedniego zakresu komórek na arkuszu (o rozmiarze 2×5 komórek), kliknięciu na przycisk „f_x” i wybraniu funkcji REGLINP oraz wpisaniu wartości jej parametrów w pojawiającym się okienku dialogowym. Okienko to zatwierdzamy kombinacją klawiszy Ctrl+Shift+Enter. Znaczenie pozostałych wyników, znajdujących się w dalszych wierszach tabeli 2, wykracza poza poziom I pracowni fizycznej.

Na Rysunek 5 widać, że wartość parametru A funkcji liniowej oraz jego niepewność wynoszą:

$$A = 2,702317, \quad u(A) = 0,052391.$$

Ponieważ $A \equiv m$, to wartość masy ciała po właściwym zaokrągleniu (rozdz. 5.1, 5.2) wynosi:

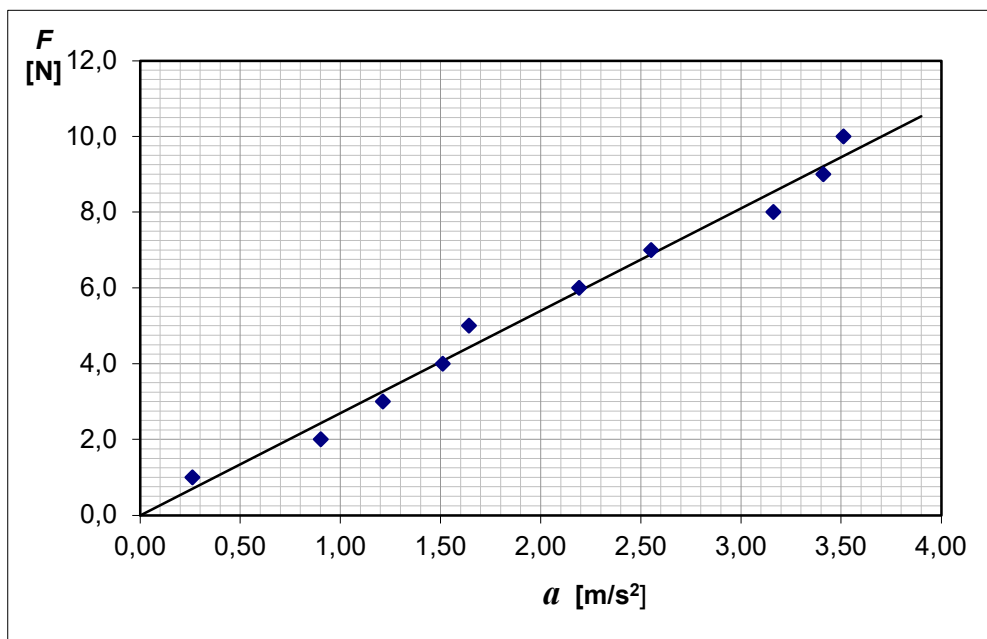
$$m = 2,702 \text{ kg}, \quad u(m) = 0,052 \text{ kg}.$$

0,26	1,0
0,90	2,0
1,21	3,0
1,51	4,0
1,64	5,0
2,19	6,0
2,55	7,0
3,16	8,0
3,41	9,0
3,51	10,0

tabela 1

2,702317	0
0,052391	
0,996629	0,379769
2660,451	9
383,702	1,29802

tabela 2



Rysunek 5, Fragment okna programu Excel z wynikami pomiarów i obliczeń

W oknie programu Excel zawarto także wykres zależności $F(a)$, z zaznaczonymi punktami pomiarowymi. Narysowana prosta posiada nachylenie równe obliczonej wartości $A = m$.

8 Dodatek. Elementy statystyki

8.1 ▼ Rozkład zmiennej losowej ▲

Jednym z podstawowych pojęć, związanych z probabilistyką, a co za tym idzie ze statystyką matematyczną, która jest niezbędnym narzędziem wykorzystywanym w ocenie niepewności pomiaru jest zmienna losowa. Zmienną losową można zdefiniować jako wielkość, która w wyniku doświadczenia (zdarzenia) przyjmuje określoną wartość, znaną po wykonaniu doświadczenia, a nie dającą się przewidzieć przed jego realizacją.

Zmienna losowa, która może przyjmować jedynie odosobnione wartości nazywana jest **dyskretną**, zaś ta, która może przyjmować dowolne wartości ze skończonego lub nieskończonego przedziału nazywana jest zmienną losową **ciągłą**.

8.1.1 ▼ Przykład 1. Rozkład zmiennej losowej dyskretnej – liczba orłów wyrzuconych przy trzech rzutach monetą ▲

Ustalmy doświadczenie polegające na trzech rzutach monetą oraz zmienną losową równą liczbie wyrzuconych orłów. Możliwe realizacje zmiennej losowej, to: wypadło 0 orłów, wypadł 1 orzeł, wypadły 2 orły, wypadły 3 orły. Jeżeli zmienną losową związaną z tym doświadczeniem oznaczymy przez X , to jej możliwe realizacje (wartości) możemy zapisać: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Każdej zmiennej losowej możemy przyporządkować tzw. **rozkład prawdopodobieństwa**. W tym celu każdej wartości zmiennej losowej przyporządkowujemy odpowiadające prawdopodobieństwo jej wystąpienia. Rozpiszmy teraz możliwe wyniki doświadczenia (zbiór zdarzeń elementarnych) i odpowiadające im wartości zmiennej losowej w nawiasach.

1. OOO ($X=x_3=3$), 2. OOR ($X=x_2=2$), 3. ORO ($X=x_2=2$), 4. ROO ($X=x_2=2$)
5. ORR ($X=x_1=1$), 6. ROR ($X=x_1=1$), 7. RRO ($X=x_1=1$), 8. RRR ($X=x_0=0$)

gdzie O oznacza, że wypadł orzeł, a R oznacza reszkę. Wszystkie te zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

Ponieważ wszystkich możliwych zdarzeń (realizacji) jest 8, łatwo można wyliczyć prawdopodobieństwo z jakim pojawia się zmienna losowa o określonej wartości. Prawdopodobieństwo to jest równe liczbie zdarzeń, które „sprzyjają” danej wartości zmiennej losowej, podzielonej przez liczbę wszystkich zdarzeń.

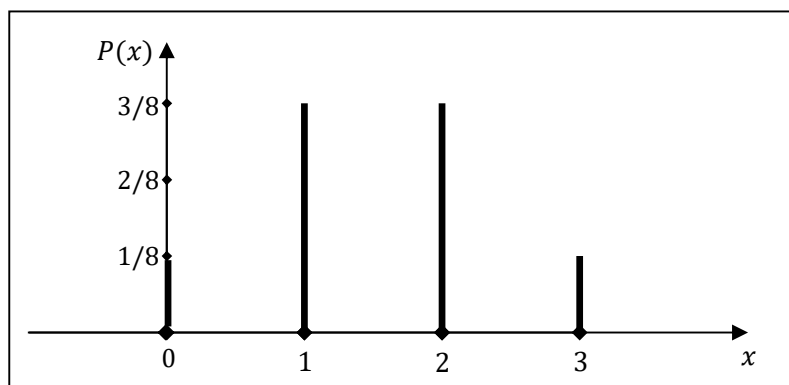
$$P(X=0) = 1/8, \quad \text{bo sprzyja RRR}$$

$$P(X=1) = 3/8, \quad \text{bo sprzyjają ORR, ROR, RRO}$$

$$P(X=2) = 3/8, \quad \text{bo sprzyjają OOR, ORO, ROO}$$

$$P(X=3) = 1/8, \quad \text{bo sprzyja OOO}$$

W ten sposób określony został rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej X . Można go również przedstawić w postaci wykresu:



Rysunek 6. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X

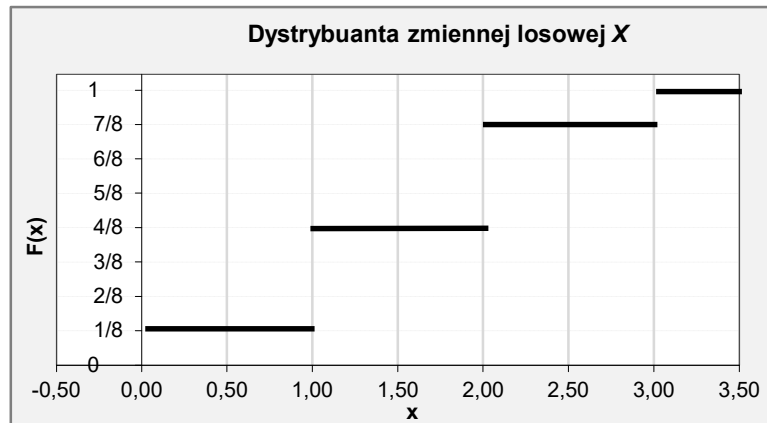
Suma prawdopodobieństw wystąpienia wszystkich wartości zmiennej losowej jest zawsze równa jedności.

Inną funkcją, często stosowaną do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, jest **dystrybuanta** $F(x)$, zdefiniowana za pomocą formuły:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (49)$$

gdzie $F(x)$ oznacza wartość dystrybuanty dla danego x , a $P(X \leq x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie wartość mniejszą lub równą danej wartości x . Dla rozważanego doświadczenia rzutu monetą dystrybuanta ma postać:

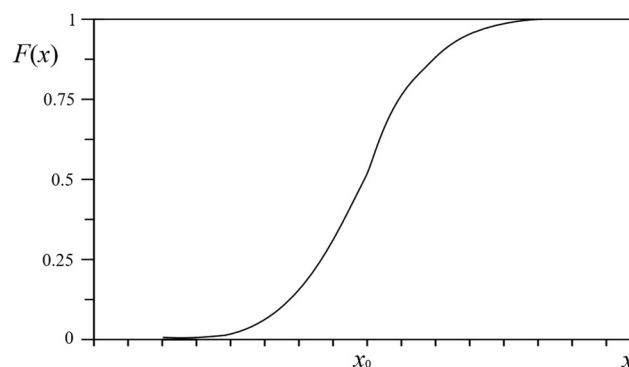
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$



Rysunek 7. Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej ma rozkład schodkowy.

8.1.2 ▼ Przykład 2. Rozkład zmiennej losowej ciągłej ▲

Realizacje zmiennej losowej ciągłej wypełniają pewien przedział liczbowy, co oznacza, że zbiór zdarzeń elementarnych, na którym określono taką zmienną jest nieskończony i nieprzeliczalny. W związku z tym, dla zmiennej ciągłej nie można przedstawić funkcji prawdopodobieństwa. Dla scharakteryzowania zmiennej losowej ciągłej możemy wykorzystać dystrybuantę, zdefiniowaną wzorem (49). Przykładową dystrybuantę dla zmiennej losowej ciągłej przedstawiono na Rysunek 8. Widać z niego na przykład, że dla pewnego x_0 prawdopodobieństwo wylosowania jakiegokolwiek wartości x mniejszej niż x_0 wynosi 0.5, czyli $P(x < x_0) = 0.5$.

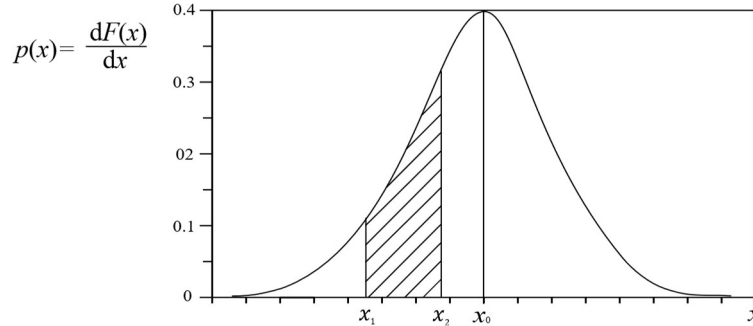


Rysunek 8. Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej

Jednak podstawową rolę w opisie zmiennych losowych ciągłych odgrywa **funkcja gęstości prawdopodobieństwa** $p(x)$. Można ją poglądowo określić jako stosunek prawdopodobieństwa $P(x_1 \leq X \leq x_2)$, że zmienna losowa X należy do przedziału $[x_1, x_2]$, do długości Δx tego przedziału, przy założeniu, że długość przedziału zdąży do zera. Inaczej mówiąc, gęstość prawdopodobieństwa jest pochodną dystrybuanty:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_1 \leq X \leq x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x_2) - P(X < x_1)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (50)$$

Jednostka gęstości prawdopodobieństwa wynika ze wzoru (50) i jest równa jednostce podzielonej przez jednostkę wielkości x . Funkcję gęstości prawdopodobieństwa odpowiadającą dystrybucji z Rysunek 8 przedstawiono na Rysunek 9.



Rysunek 9. Gęstość prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X .

W definicji (50) możemy zrezygnować z warunku, żeby rozpatrywany przedział $[x_1, x_2]$ o długości Δx był nieskończenie mały (Rysunek 9). Otrzymamy wtedy przybliżony wzór na gęstość prawdopodobieństwa obliczoną dla środka przedziału:

$$p(x_{sr}) \approx \frac{P(x_1 \leq X \leq x_2)}{\Delta x}, \quad (51)$$

gdzie $x_{sr} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Z ostatniej równości wyznaczmy prawdopodobieństwo $P(x_1 \leq X \leq x_2)$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \Delta x \quad (52)$$

i zastosujmy jeszcze jedno przybliżenie, słuszne dla funkcji ciągłych:

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \approx \frac{p(x_1) + p(x_2)}{2}.$$

Dostaniemy wtedy:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx \frac{p(x_1) + p(x_2)}{2} \cdot \Delta x. \quad (53)$$

Powyższa zależność mówi nam, że **prawdopodobieństwo** P wystąpienia zmiennej losowej o wartości należącej do przedziału $[x_1, x_2]$ można obliczyć w sposób przybliżony, jako pole trapezu zawartego pod krzywą $p(x)$ (Rysunek 9). Dokładnie prawdopodobieństwo to można obliczyć jako pole określone pod krzywą $p(x)$, odpowiadające temu przedziałowi. Pole to obliczamy za pomocą całki:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (54)$$

Prawdopodobieństwo to również możemy wyrazić jako:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1). \quad (55)$$

Oznacza to, że znając wartości dystrybucyjny F (mogą być stabelaryzowane) można obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej losowej w dowolnym przedziale $[x_1, x_2]$.

Ponieważ błąd pomiaru można rozważać jako zmienną losową ciągłą o rozkładzie normalnym (o którym mowa będzie dalej), sposób wyznaczania prawdopodobieństwa występowania zmiennej, w określonym przedziale, jest użyteczny przy analizie wyników pomiarów i ich niepewności.

8.2 ▼ Podstawowe parametry rozkładów zmiennych losowych ▲

Do opisu zmiennych losowych stosuje się parametry, które charakteryzują w syntetyczny sposób te zmienne. W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną dwa podstawowe parametry – wartość oczekiwana i wariancja, które są szczególnie istotne z punktu widzenia szacowania niepewności pomiarów.

8.2.1 ▼ Wartość oczekiwana zmiennej losowej ▲

Wartością oczekiwaną (średnią) zmiennej losowej X nazywamy wielkość $E(X)$ daną wyrażeniem:

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_i \cdot P(x_i) & \text{dla zmiennych losowych dyskretnych} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx & \text{dla zmiennych losowych ciągłych} \end{cases} \quad (56)$$

gdzie: $P(x_i)$ – prawdopodobieństwo wystąpienia i -tej wartości x_i zmiennej losowej X ,

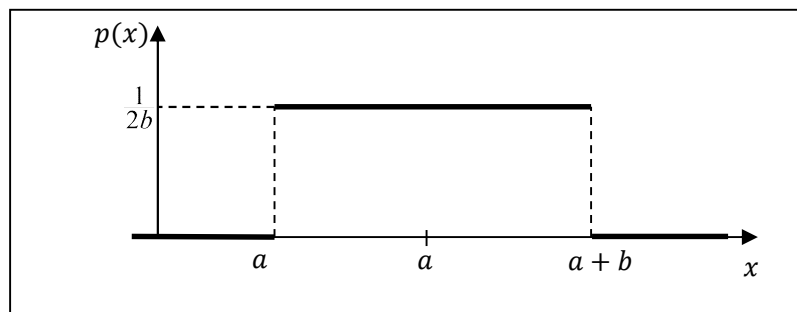
$p(x)$ – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

W przykładzie 1 (rozdz. 8.1.1) zmienna losowa – liczba orłów wyrzuconych w trzech rzutach monetą – jest **dyskretna**. Dlatego jej wartość oczekiwaną według wzoru (56) policzymy następująco:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

co oznacza, że w trzech rzutach monetą średnia liczba orłów to 1.5.

Jako przykład 2 rozpatrzmy zmienną losową **ciągłą**, którą charakteryzuje jednakowe prawdopodobieństwo wystąpienia w pewnym przedziale, a poza tym przedziałem prawdopodobieństwo wystąpienia jest zerowe. Mówimy, że zmienna ta ma rozkład jednostajny (Rysunek 10).



Rysunek 10. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej o rozkładzie jednostajnym

Ponieważ szerokość przedziału jest równa $2b$, to z równania (53) (które w tym przypadku jest ściste) lub ze wzoru (54) wynika, że gęstość prawdopodobieństwa musi być równa $\frac{1}{2b}$ – jedynie wtedy prawdopodobieństwo

wystąpienia zmiennej (pole pod wykresem) gdziekolwiek w całym przedziale jest równe jeden. Wartość oczekiwaną można obliczyć ze wzoru (56) w następujący sposób:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^{a-b} x \cdot 0 dx + \int_{a-b}^{a+b} x \frac{1}{2b} dx + \int_{a+b}^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_{a-b}^{a+b} x \frac{1}{2b} dx = \frac{x^2}{4b} \Big|_{a-b}^{a+b} = a \quad (57)$$

Wartość oczekiwana wyznacza położenie „środka koncentracji” rozkładu zmiennej losowej na osi. Jednocześnie jest miarą pewnej średniej wartości zmiennej losowej. Często oznaczana jest grecką literą μ .

8.2.2 ▼ Wariancja zmiennej losowej ▲

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy wielkość $V(X)$ zdefiniowaną następująco:

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \begin{cases} \sum [x_i - E(X)]^2 \cdot P(x_i) & \text{dla zmiennych los. dyskretnych} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 \cdot p(x) dx & \text{dla zmiennych los. ciągłych} \end{cases} \quad (58)$$

Parametr ten charakteryzuje rozrzut wartości zmiennej losowej wokół wartości oczekiwanej. Ponieważ, jak widać ze wzoru, wariancja ma jednostkę będącą kwadratem jednostki zmiennej losowej, najczęściej w praktyce posługuje się pierwiastkiem z wariancji, który nazywany jest **odchyleniem standardowym** σ :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}. \quad (59)$$

Wariancję dyskretnej zmiennej losowej – liczby orłów wyrzuconych w trzech rzutach monetą z przykładu 1 (rozdz. 8.2.1) – obliczymy następująco, znając jej wartość oczekiwaną $E(X) = 1,5$:

$$V(X) = (0 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8} = 0,75$$

Zatem odchylenie standardowe według wzoru (59) wynosi: $\sigma(X) = 0,87$.

Wariancję ciągłej zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym z przykładu 2 (rozdz. 8.2.1), znając jej wartość oczekiwaną $E(X) = a$, obliczymy następująco:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx = \int_{a-b}^{a+b} (x - a)^2 \frac{1}{2b} dx = \frac{1}{2b} \frac{(x - a)^3}{3} \Big|_{a-b}^{a+b} = \frac{b^2}{3} \quad (60)$$

Zatem odchylenie standardowe rozkładu jednostajnego, wyznaczone ze wzoru (59), wynosi:

$$\sigma(X) = \frac{b}{\sqrt{3}}. \quad (61)$$

8.3 Estymatory

Należy pamiętać, że w praktyce wartości parametrów μ i σ (wartość oczekiwana i odchylenie stand.) rozkładu zmiennej losowej X nie są do końca poznawalne. Jedyne, czym dysponujemy, to wylosowane (np. zmierzone) wartości tej zmiennej, a one są przecież przypadkowe. Dlatego wartości parametrów μ i σ szacuje się na podstawie doświadczalnych prób (serii pomiarów), a przybliżone parametry w ten sposób wyznaczone

nazywane są estymatorami. I tak najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej μ jest **wartość średnia z próby** obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (62)$$

gdzie x_i jest wartością otrzymaną z i -tego pomiaru danej wielkości fizycznej (będącą zmienną losową).

Dobrym estymatorem odchylenia standardowego σ jest **odchylenie standardowe eksperymentalne (dla pojedynczego pomiaru)**, obliczane ze wzoru:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (63)$$

Ciekawym i bardzo przydatnym faktem jest to, że wartość średnia $\bar{x}$, sama będąc zmienną losową, ma wartość oczekiwaną równą μ , tak jak zmienna losowa X . Natomiast odchylenie standardowe $\sigma_{\bar{x}}$ wartości średniej jest $\sqrt{n}$ razy mniejsze niż odchylenie standardowe σ zmiennej X :

$$E(\bar{x}) = \mu, \quad \sigma_{\bar{x}} \equiv \sqrt{V(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (64)$$

Podstawiając do tej zależności estymator s_x zamiast parametru σ , możemy wyznaczyć **estymator $s_{\bar{x}}$ odchylenia standardowego $\sigma_{\bar{x}}$ wartości średniej**:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (65)$$

8.4 Rozkład normalny zmiennej losowej – rozkład Gaussa

8.4.1 Podstawy

Z rozkładem normalnym zmiennej losowej mamy do czynienia wówczas, gdy zmienna ta jest wynikiem procesu, w ramach którego oddziałuje na tę zmienną duża liczba niezależnych czynników, których wpływ traktowany odrębnie jest mało znaczący. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ (rozdz. 8.1.2, wzór (50)) rozkładu normalnego wyraża się wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty \quad (66)$$

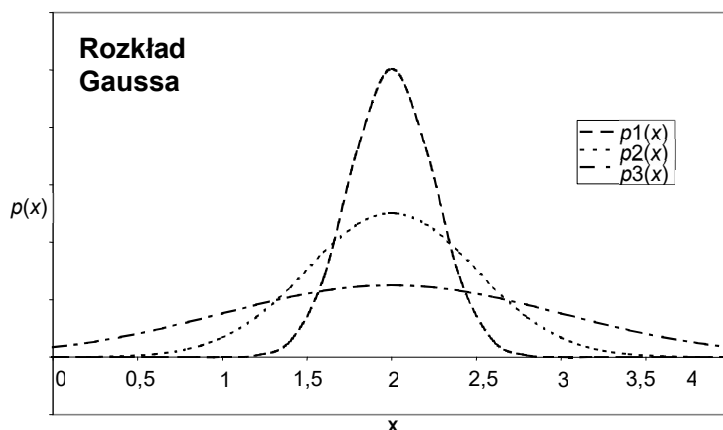
gdzie: μ – wartość oczekiwana, σ – odchylenie standardowe.

Czasami używane są inne, przekształcone postaci tej funkcji, na przykład w programie Origin zamiast parametru σ występuje parametr $\sigma' = 2\sigma$, co prowadzi do wzoru:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-\frac{2(x-\mu)^2}{\sigma'^2}}, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty \quad (67)$$

Rozkład normalny jest w pełni scharakteryzowany przez powyższe dwa parametry: wartość oczekiwaną μ (rozdz. 8.2.1) i odchylenie standardowe σ (rozdz. 8.2.2). Cechą rozkładu Gaussa jest to, że wartość oczekiwana μ

pokrywa się z wartością najbardziej prawdopodobną. Kształty krzywych gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dla $\mu = 2$ i trzech wartości σ , odpowiednio 0.25, 0.5 i 1, przedstawia Rysunek 11. Jak widać z wykresu, im większe jest odchylenie standardowe σ tym przebieg krzywej gęstości prawdopodobieństwa jest szerszy i bardziej spłaszczony, co oznacza większy rozrzut zmiennej losowej X wokół wartości oczekiwanej μ .



Rysunek 11. Kształty krzywych gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dla $\mu = 2$ i trzech wartości σ , odpowiednio 0.25 – $p1(x)$, 0.5 – $p2(x)$ i 1 – $p3(x)$

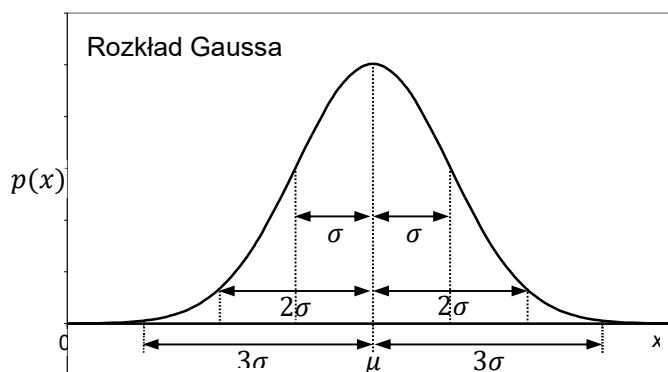
Podstawowe własności rozkładu normalnego:

1. Jest symetryczny względem wartości oczekiwanej,
2. Gęstość prawdopodobieństwa jest największa w najbliższym otoczeniu wartości oczekiwanej,
3. Prawdopodobieństwa wystąpienia zmiennej losowej w charakterystycznych przedziałach w otoczeniu wartości oczekiwanej pokazanych na Rysunek 12 wynoszą:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0,6826 \quad (68,26\%)$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0,9544 \quad (95,44\%)$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973 \quad (99,73\%)$$



Rysunek 12. Rozkład normalny Gaussa – przedziały charakterystyczne.

Znając wartości μ oraz σ można sformułować wzór na gęstość prawdopodobieństwa $p(x)$ (wzory (50), (66)) i **obliczyć prawdopodobieństwo $P([x_1, x_2])$ wystąpienia zmiennej x w dowolnym przedziale $[x_1, x_2]$** za pomocą wzoru (54). W praktyce w celu obliczenia szukanego prawdopodobieństwa często korzysta się z tablic dystrybucyj (49). Stablicowany jest rozkład zmiennej losowej standaryzowanej Z , która jest związana ze zmienną X formułą:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (68)$$

Zmienna Z ma standardowy rozkład normalny, tzn. ma wartość oczekiwaną $\mu = 0$ i odchylenie standardowe $\sigma = 1$. Metoda obliczenia wspomnianego wyżej prawdopodobieństwa $P([x_1, x_2])$ jest następująca: ze wzoru (68) obliczamy wartości z_1 i z_2 , a następnie z tablic tego rozkładu wyznaczamy wartości dystrybucyjny $F(z_1)$ i $F(z_2)$. Szukane prawdopodobieństwo $P([x_1, x_2]) = P([z_1, z_2])$ obliczamy wtedy ze wzoru (55).

8.4.2 Liczna próba z rozkładu normalnego

Załóżmy że dokonano n pomiarów pewnej niezmienniej wielkości fizycznej X (n -liczna próba), a wynik pojedynczego pomiaru x_i jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Jako wynik całego pomiaru przyjmujemy średnią $\bar{x}$, która estymuje nieznaną wartość parametru rozkładu μ . Jeżeli wyeliminowano błąd systematyczny, to wynik całego pomiaru $\bar{x}$ ma wartość oczekiwaną równą wartości prawdziwej $E(X) = \mu$ i odchyłkę standardową $\sigma_{\bar{x}}$ (wzór (64)). W praktyce wartość parametru $\sigma_{\bar{x}}$ nie jest znana, ale szacuje się ją przy pomocy estymatora $s_{\bar{x}}$ (wzór (65)). Dla dużych prób ($n \rightarrow \infty$, a w praktyce np. $n > 30$) wartość średnia estymatora $s_{\bar{x}}$ zdąża do odchyłki standardowej $\sigma_{\bar{x}}$. Wartość $\sigma_{\bar{x}}$ jest jednak tylko pewnym średnim błędem popełnianym przy wyznaczeniu parametru μ za pomocą średniej $\bar{x}$, a rzeczywisty wynik pomiaru $\bar{x}$ może nie należeć do przedziału $(X - \sigma_{\bar{x}}, X + \sigma_{\bar{x}})$ wokół wartości prawdziwej X .

Dlatego interesuje nas prawdopodobieństwo wystąpienia wartości pomiaru $\bar{x}$ w rozszerzonym przedziale $(X - k\sigma_{\bar{x}}, X + k\sigma_{\bar{x}})$:

$$P(X - k\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq X + k\sigma_{\bar{x}}) \equiv p_a \quad (69)$$

gdzie: p_a – tzw. poziom ufności, k – współczynnik rozszerzenia (tzw. kwantyl rozkładu normalnego). Jeżeli przyjmujemy k na tyle duże że prawdopodobieństwo P znalezienia wyniku pomiaru w rozszerzonym przedziale będzie bliskie jedności, to przedział ten możemy uznać za właściwą miarę niepewności pomiaru.

Można teraz całą sytuację odwrócić i powiedzieć że:

prawdziwa wartość mierzonych wielkości X leży wewnątrz przedziału $(\bar{x} - k\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + k\sigma_{\bar{x}})$ wokół średniej $\bar{x}$ z poziomem ufności p_a	(70)
--	-------------

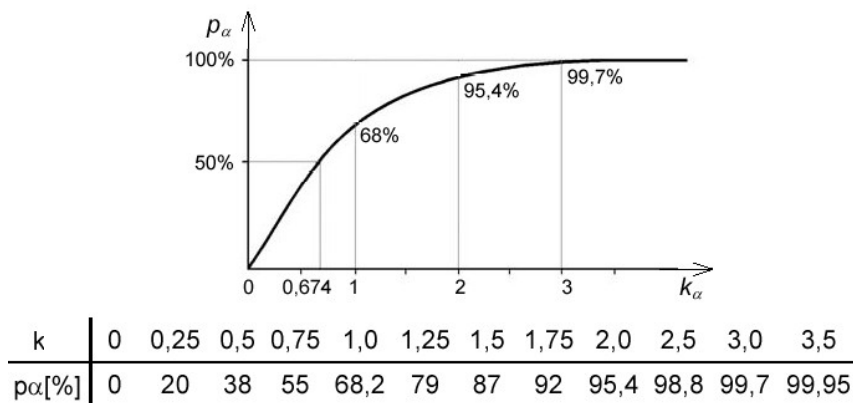
▼ Prawdopodobieństwo równoważne poziomowi ufności p_a można obliczyć dla danego k , czyli też dla danego przedziału ufności, znając dystrybucyjną standardowego rozkładu normalnego. Użyteczność tego rozkładu łatwo widać, gdy przekształcimy definicję (68) zmiennej z podlegającej temu rozkładowi do postaci $x = \mu + z\sigma$ lub dostosowując do obecnego przypadku do postaci $\bar{x} = X + k\sigma_{\bar{x}}$. Dla dwóch wartości k , równych co do wartości bezwzględnej, ale przeciwnych znaków, otrzymujemy dwie wartości średniej: $\bar{x} = X - k\sigma_{\bar{x}}$ i $\bar{x} = X + k\sigma_{\bar{x}}$, równe granicom przedziału we wzorze (69). Ponieważ zmienną z zastąpiliśmy literą k , to poziom ufności można obliczyć według wzoru (55) następująco:

$$p_a = F(k) - F(-k) = 1 - 2F(-k) = 2F(k) - 1 \quad (71)$$

gdzie F jest dystrybucyjną standardowego rozkładu normalnego.



Rysunek 13. przedstawia zależność współczynnika rozszerzenia k od przyjmowanego poziomu ufności p_a .



Rysunek 13. Zależność współczynnika rozszerzenia k od przyjmowanego poziomu ufności p_a

W praktyce inżynierskiej częstym rozwiązaniem jest przyjmowanie współczynników rozszerzenia o wartościach $k = 1, 2$ lub 3 (tak zwanych przedziałów σ , 2σ lub 3σ) i odpowiadających im poziomów ufności odpowiednio 0,68 (68%), 0,95 (95%), 0,997 (99,7%). Na koniec należy zastosować zdanie wyrażone wzorem (70) (granice przedziału obliczając ze znanych $\bar{x}$ i $s_{\bar{x}}$).

8.4.3 Mało liczna próba z rozkładu normalnego

Jeżeli podobnie jak w rozdz. 8.4.2, jako wynik całego pomiaru przyjmujemy średnią $\bar{x}$, ale obliczoną z małej serii pomiarów (w praktyce $n < 30$) to wyznaczona estymata $\bar{x}$ różni się od nieznanego parametru rozkładu μ (który to parametr możemy przyjąć za prawdziwą wartość mierzonej wielkości fizycznej X), czyli $\bar{x} \neq \mu = X$. Na dodatek teraz estymata $s_{\bar{x}}$ (wzór (65)) nieznanej odchyłki standardowej $\sigma_{\bar{x}}$ (wzór (64)) średniej $\bar{x}$ różni się od tej odchyłki, $s_{\bar{x}} \neq \sigma_{\bar{x}}$. Powinniśmy zatem zapytać, podobnie jak w rozdziale 8.4.2, jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku pomiaru $\bar{x}$ w rozszerzonym przedziale $(X - ts_{\bar{x}}, X + ts_{\bar{x}})$ wokół wartości prawdziwej X . Zależność (50) zapisujemy teraz następująco:

$$P(X - ts_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq X + ts_{\bar{x}}) \equiv p_a \quad (72)$$

gdzie t -współczynnik rozszerzenia, kwantyl rozkładu t-Studenta (analogiczny do współczynnika k).

Odwracając teraz całą sytuację można powiedzieć, że:

prawdziwa wartość mierzonej wielkości X leży wewnątrz przedziału $(\bar{x} - ts_{\bar{x}}, \bar{x} + ts_{\bar{x}})$ wokół średniej $\bar{x}$ z poziomem ufności p_a

(73)

▼ Zmienną losową o rozkładzie t-Studenta oznacza się zwykle symbolem T , a jej wartości – literą t . Jej definicja jest podobna do definicji (68) zmiennej Z (o rozkładzie standardowym normalnym):

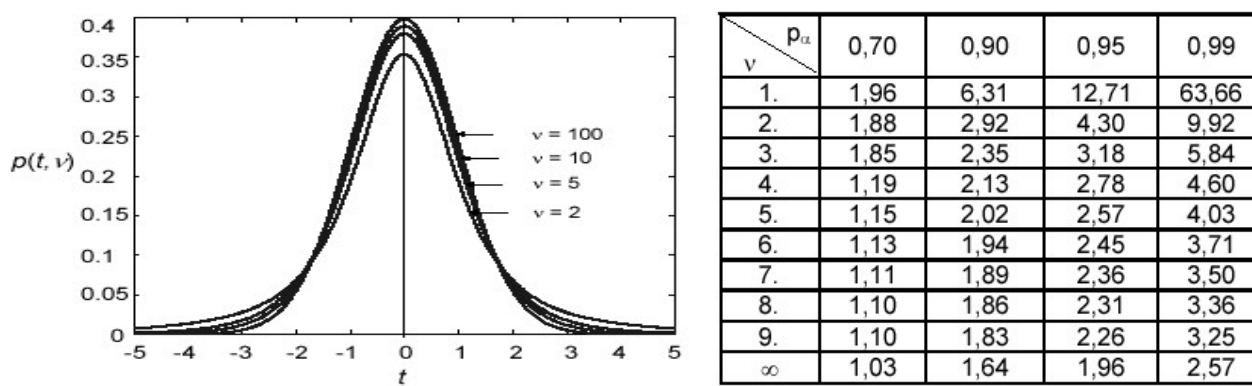
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \quad (74)$$

zastępujemy tylko nieznaną parametr $\sigma_{\bar{x}}$ rozkładu zmiennej losowej $\bar{x}$ jego estymatorem $s_{\bar{x}}$.

Użyteczność definicji (74) można zobaczyć, przekształcając ją do postaci $\bar{x} = \mu + ts_{\bar{x}}$. Dla dwóch wartości zmiennej losowej t , równych co do wartości bezwzględnej, ale przeciwnych znaków, otrzymujemy dwie wartości średniej z pomiarów: $\bar{x} = \mu - ts_{\bar{x}}$ i $\bar{x} = \mu + ts_{\bar{x}}$, równe granicom przedziału we wzorze (72). Dlatego znajomość rozkładu t-Studenta prowadzi prosto do obliczenia prawdopodobieństwa (72) odpowiadającego poziomowi ufności dla danego t , czyli także dla danego przedziału ufności. Rozkład ten, pokazany na Rysunek 14, jest funkcją tylko jednego parametru, który nosi nazwę „liczba stopni swobody” i jest oznaczany literą ν . U nas $\nu = n - 1$, gdzie n oznacza licznosc próby. Wartość oczekiwana i wariancja rozkładu wynoszą:

$$E(T) = 0, \quad V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad \text{dla } n > 3 \quad (75)$$

Podobnie jak rozkład normalny, rozkład t-Studenta jest symetryczny. Wraz ze wzrostem liczby stopni swobody ν rozkład ten staje się identyczny jak standardowy rozkład normalny.



Rysunek 14. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu t-Studenta i stabelaryzowane wartości współczynnika rozszerzenia t (kwantyle rozkładu) w zależności od liczby stopni swobody ν i przyjętego poziomu ufności p_{α} .

Funkcja gęstości rozkładu t-Studenta ma złożoną postać, dlatego też w praktyce do wyznaczania prawdopodobieństwa nie korzysta się z jej zapisu analitycznego, lecz z tablic (Rysunek 14). Dla wyznaczenia prawdziwej wartości mierzonej wielkości za pomocą wartości średniej z pomiarów, należy przyjąć liczbę stopni swobody $\nu = n - 1$ (gdzie n to liczba pomiarów), z tablicy rozkładu t-Studenta odczytać wartość współczynnika rozszerzenia t dla danej liczby ν i założonego poziomu ufności p_{α} , a na koniec zastosować zdanie wyrażone wzorem (73) (granice przedziału obliczając ze znanych $\bar{x}$ i $s_{\bar{x}}$).

8.4.4 Przykład praktyczny – liczna próba z rozkładu Gaussa. Wyznaczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa metodą najmniejszych kwadratów.

Tym samym amperomierzem o dokładności $\Delta I = 2mA$ i na tym samym zakresie wykonano serię $N = 200$ pomiarów niezmiennego natężenia prądu płynącego przez pewien obwód. W celu lepszej przydatności do dalszej obróbki wyniki pomiarów posortowano we wzrastającej kolejności i przedstawiono w miliamperach w tabeli 1.

Tabela 1. Posortowane wyniki pomiarów natężenia prądu (w mA)

18,59	18,81	18,81	19,91	20,01	20,13	20,39	20,40	20,57	20,62	20,7	20,73	20,74	20,78	20,85	20,88	20,93	21,07	21,07	21,20
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

21,25	21,27	21,35	21,46	21,55	21,58	21,61	21,62	21,66	21,67	21,71	21,76	21,82	21,82	21,88	21,89	21,93	21,97	21,98	22,03
22,05	22,06	22,07	22,08	22,1	22,17	22,18	22,19	22,24	22,29	22,30	22,31	22,36	22,38	22,4	22,41	22,46	22,66	22,75	22,76
22,78	22,78	22,78	22,78	22,81	22,83	22,88	22,89	22,95	22,97	23,00	23,00	23,05	23,06	23,06	23,07	23,09	23,09	23,09	23,14
23,17	23,18	23,2	23,21	23,25	23,25	23,26	23,29	23,31	23,33	23,34	23,35	23,39	23,40	23,43	23,43	23,44	23,45	23,47	23,50
23,50	23,51	23,51	23,52	23,57	23,59	23,64	23,66	23,70	23,73	23,74	23,75	23,81	23,84	23,86	23,9	23,91	23,92	23,94	23,94
23,95	23,99	24,04	24,05	24,07	24,11	24,12	24,16	24,16	24,17	24,28	24,36	24,39	24,40	24,41	24,44	24,45	24,46	24,46	24,5
24,54	24,58	24,61	24,66	24,70	24,73	24,79	24,82	24,83	24,84	24,84	24,97	24,99	25,03	25,03	25,11	25,19	25,24	25,28	25,29
25,29	25,33	25,35	25,35	25,41	25,45	25,47	25,47	25,52	25,56	25,57	25,61	25,64	25,85	25,89	25,89	25,99	26,07	26,13	26,14
26,16	26,23	26,24	26,27	26,44	26,58	26,58	26,59	26,72	26,78	27,02	27,05	27,21	27,23	27,25	27,28	27,36	27,57	28,17	28,79

Według teorii błędów przypadkowych, wyniki pomiarów podlegają **rozkładowi Gaussa** (rozdz. 8.4, wzór (66), czyli gęstość prawdopodobieństwa (rozdz. 8.1.2) otrzymania wyniku pomiaru równego I jest dana wzorem

$$p(I) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (76)$$

gdzie I_0 i σ są odpowiednio wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym rozkładu.

Tę gęstość prawdopodobieństwa p dla wartości środkowej I_{sr_i} z przedziału (I_i, I_{i+1}) o szerokości ΔI można oszacować z prawdopodobieństwa P_i otrzymania wyniku pomiaru zawartego w tym przedziale dzięki przybliżonej równości (51):

$$p_i \equiv p(I_{sr_i}) = \frac{P_i}{\Delta I} \quad (77)$$

W celu wyznaczenia rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $p(I)$ w poszczególnych przedziałach w przedstawionym przypadku pomiarów prądu elektrycznego, dzielimy zakres zmienności zmierzonego natężenia prądu I na $n = 6$ jednakowo szerokich przedziałów. W drugiej wersji tego przykładu ustalamy liczbę przedziałów $n = 24$. Jak widać z tabeli (Tabela 1), cały zakres zmienności natężenia można przyjąć równy (18 mA, 30 mA), co daje szerokość każdego przedziału równą odpowiednio $\Delta I_1 = 2$ mA lub $\Delta I_2 = 0.5$ mA w obu wersjach. Zliczając liczby wystąpienia wyników pomiarów w każdym z tych przedziałów, które oznaczamy przez N_i tworzymy **histogram** pomiarów, czyli zbiór wartości N_i dla poszczególnych przedziałów. Wyniki tych zliczeń N_i są przedstawione w tabeli 2 i 3 oraz na Rysunek 15.

Następnie dla każdego przedziału obliczamy **procentowy udział liczby wyników** w przedziale, który oznaczamy przez k_i , według wzoru:

$$k_i = \frac{N_i}{N} \quad (78)$$

gdzie N to liczba wszystkich pomiarów. Wyniki tych obliczeń są przedstawione w tabeli 2 i 3 i na Rysunek 16.

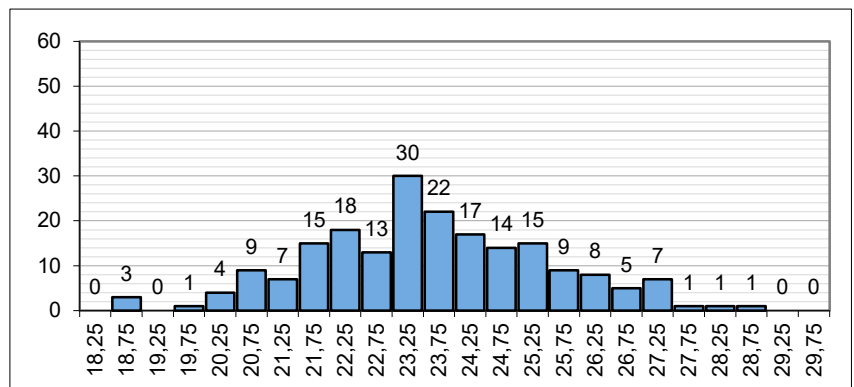
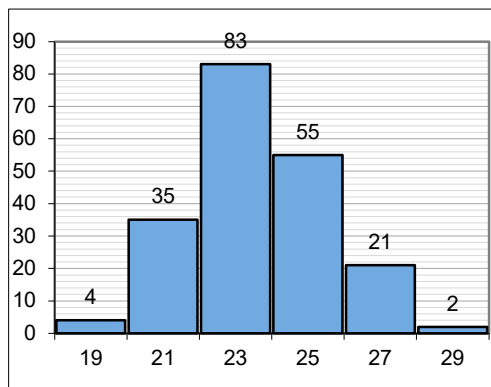
Tabela 2. Liczby N_i , k_i , p_i dla każdego przedziału, w przypadku $n = 6$

przedział	18÷20	20÷22	22÷24	24÷26	26÷28	28÷30
N_i	4	35	83	55	21	2
k_i	0,02	0,175	0,415	0,275	0,105	0,01
p_i	0,01	0,0875	0,2075	0,1375	0,0525	0,005

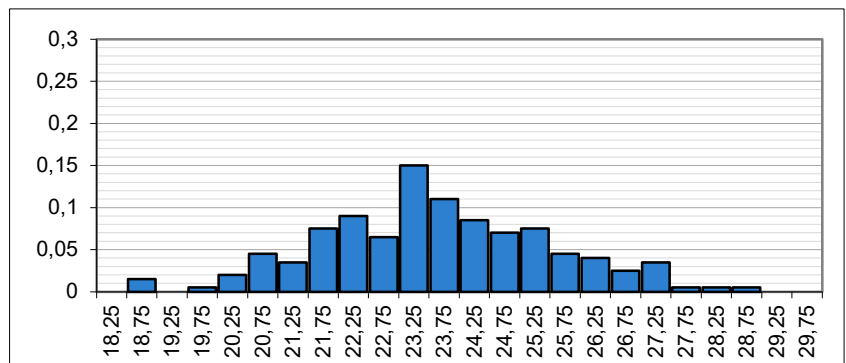
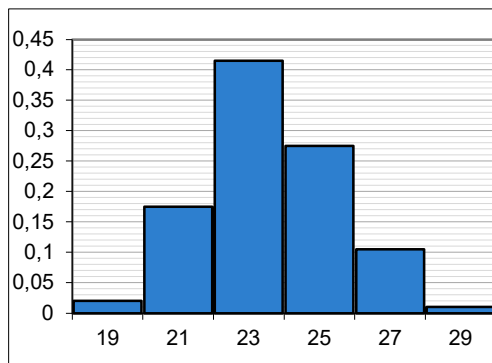
Tabela 3. Liczby N_i , k_i , p_i dla każdego przedziału, w przypadku $n = 24$

przedział	18÷18,5	18,5÷19	19÷19,5	19,5÷20	20÷20,5	20,5÷21	21÷21,5	21,5÷22	22÷22,5	22,5÷23	23÷23,5	23,5÷24
N_i	0	3	0	1	4	9	7	15	18	13	30	22
k_i	0	0,015	0	0,005	0,02	0,045	0,035	0,075	0,09	0,065	0,105	0,11
p_i	0	0,03	0	0,01	0,04	0,09	0,07	0,15	0,18	0,13	0,3	0,22

przedział	24÷24,5	24,5÷25	25÷25,5	25,5÷26	26÷26,5	26,5÷27	27÷27,5	27,5÷28	28÷28,5	28,5÷29	29÷29,5	29,5÷30
N_i	17	14	15	9	8	5	7	1	1	1	0	0
k_i	0,085	0,07	0,075	0,045	0,04	0,025	0,035	0,005	0,005	0,005	0	0
p_i	0,17	0,14	0,15	0,09	0,08	0,05	0,07	0,01	0,01	0,01	0	0



Rysunek 15. Histogramy N_i dla szerokości przedziałów $\Delta I_1 = 2 \text{ mA}$ ($n = 6$) i $\Delta I_2 = 0.5 \text{ mA}$ ($n = 24$)

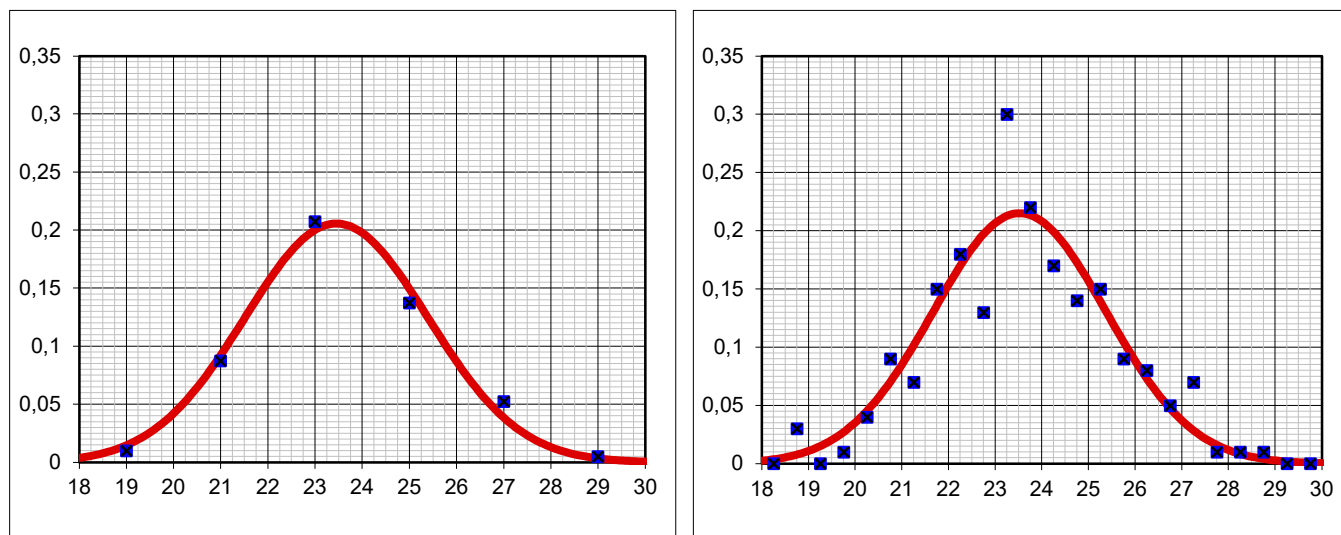


Rysunek 16. Procentowy udział k_i dla szerokości przedziałów $\Delta I_1 = 2 \text{ mA}$ ($n = 6$) i $\Delta I_2 = 0,5 \text{ mA}$ ($n = 24$)

Procentowy udział k_i jest w każdym przedziale przybliżeniem (estymatorem) prawdopodobieństwa $P_i = P(I_i \leq I < I_{i+1})$ wystąpienia wyniku pomiaru prądu I w tym przedziale. Prawdopodobieństwa P_i są nieznanne, ale jeżeli zamiast nich użyjemy procentowych udziałów k_i , można będzie ze wzoru (77) obliczyć **estymaty** p_i **gęstości prawdopodobieństwa** $p(I_{sr_i})$:

$$p_i = \frac{k_i}{\Delta I} \quad (79)$$

Wyniki obliczeń estymat p_i są przedstawione w tabeli 2 i 3 oraz na Rysunek 17.



Rysunek 17. Estymaty p_i gęstości prawdopodobieństwa dla $\Delta I_1 = 2 \text{ mA}$ ($n = 6$) i $\Delta I_2 = 0,5 \text{ mA}$ ($n = 24$) oraz dopasowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa (linia czerwona).

Zwróćmy uwagę, że jeżeli szerokość przedziałów jest mniejsza, jak u nas $\Delta I_2 = 0,5 \text{ mA}$ (dla $n = 24$) w porównaniu z $\Delta I_1 = 2 \text{ mA}$ (dla $n = 6$), to liczby zliczeń N_i wyników pomiarów w każdym z tych przedziałów także są mniejsze, a co za tym idzie procentowe udziały k_i są mniejsze (co widać na Rysunek 15 i Rysunek 16). Mimo to estymaty p_i gęstości prawdopodobieństwa są porównywalne dla obu szerokości przedziałów z powodu podzielenia k_i przez odpowiednią szerokość przedziału ΔI (wzór (79)), co widać na Rysunek 17.

Obliczone wielkości p_i nie są równe gęstości prawdopodobieństwa, a tylko ją przybliżają. Jest tak nie tylko z powodu zastąpienia w definicji (50) nieskończenie małego przyrostu dI skończoną szerokością przedziału ΔI , ale także zastąpienia prawdopodobieństwa P_i wystąpienia pomiaru w i -tym przedziale przez procentowy udział k_i . Z tzw. prawa wielkich liczb wynika, że dopiero dla liczby wszystkich pomiarów N zdążającej do nieskończoności k_i zdąża do P_i . Dlatego powyższa procedura dokonania N pomiarów natężenia prądu I oraz obliczenia wielkości p_i jest równoważna pomiarowi gęstości prawdopodobieństwa $p(I_{sr_i})$ w środkach przedziałów I_{sr_i} . Bo tak jak w każdym pomiarze, wyniki p_i pomiaru gęstości prawdopodobieństwa $p(I_{sr_i})$ są obarczone niepewnością.

Jeżeli rozkład gęstości prawdopodobieństwa $p(I)$ wyników pomiaru natężenia prądu jest rozkładem Gaussa, to parametry tego rozkładu, czyli wielkości I_0 i σ , wyznaczymy za pomocą **metody najmniejszych kwadratów** przez dopasowanie krzywej Gaussa do estymat gęstości prawdopodobieństwa p_i .

Funkcja dopasowująca ma postać daną wzorem (76), a punkty pomiarowe mają współrzędne (I_{sr_i}, p_i) przedstawione w tabeli 2 dla podziału zakresu pomiarowego na $n = 6$ przedziałów lub w tabeli 3 dla $n = 24$. Zastosowanie programu Origin daje wyniki I_0 i σ zebrane w tabeli 4. Wykres tak wyznaczonej funkcji gęstości prawdopodobieństwa Gaussa przedstawia Rysunek 17.

Wyniki te można porównać z parametrami rozkładu Gaussa obliczonymi inną metodą: I_0 estymowanym za pomocą średniej arytmetycznej $\bar{I}$ według wzoru (1) oraz σ estymowanym za pomocą odchylenia standardowego eksperymentalnego dla pojedynczego pomiaru s_I według wzoru (2a):

$$\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i \quad s_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (I_i - \bar{I})^2}{N - 1}} \quad (80)$$

Tabela 4. Wyniki estymacji parametrów rozkładu Gaussa

	Metoda najmniejszych kwadratów		Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe	
	I_o [mA]	σ [mA]	$\bar{I}$ [mA]	s_I [mA]
$n = 6$	23,450	1,939	23,615	1,885
$n = 20$	23,524	1,854		