

Wyznaczanie temperaturowego współczynnika rezystancji metali

Wymagania do ćwiczenia

1. Sieć krystaliczna.
2. Prąd elektryczny, prawo Ohma, opór właściwy ρ (rezystancja właściwa), przewodnictwo właściwe σ .
3. Elektronowa teoria Drudego – model swobodnych elektronów.

Literatura

1. David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Podstawy Fizyki Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2015.
2. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 2, Rozdział 9.4 [Prawo Ohma](#).
3. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 3, OpenStax, Rozdział 9.4 [Model elektronów swobodnych w metalach](#).

Przykładowe pytania

1. Jak model swobodnych elektronów (teoria Drudego) wyjaśnia mechanizm przewodzenia prądu elektrycznego w metalach.
2. Jakie są główne przyczyny powstawania oporu elektrycznego w modelu Drudego?
3. Dlaczego drgania cieplne jonów sieci krystalicznej metalu mają wpływ na jego rezystywność.
4. Jak amplituda drgań jonów sieci krystalicznej metalu zmienia się wraz z temperaturą?
5. Co to jest fonon i jaką rolę odgrywają fonony w procesie rozpraszania elektronów przewodnictwa w metalach?
6. Zdefiniuj pojęcie rezystywności (oporu właściwego) i wyjaśnij, czym różni się ona od rezystancji (oporu elektrycznego).
7. Od jakich czynników zależy rezystywność danego metalu?
8. Co oznacza temperaturowy współczynnik rezystancji?
9. Co to jest opór resztkowy?

10. Jak obecność zanieczyszczeń i defektów w sieci krystalicznej wpływa na rezystywność metalu?
11. Opisz, w jaki sposób zmiana temperatury wpływa na średni czas swobodnej drogi (czas relaksacji) elektronów w metalu według modelu Drudego i jak przekłada się to na zmianę rezystywności.
12. Jakie są główne ograniczenia klasycznego modelu Drudego w opisie przewodnictwa elektrycznego metali i jego zależności od temperatury?
13. Wyjaśnij fizyczne znaczenie znaku temperaturowego współczynnika rezystancji.

Przyrządy pomiarowe

1. Zestaw doświadczalny (grzałka, termometr, omomierz)

WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Opór elektryczny

Rezystancja R jest miarą oporu z jakim przewodnik przeciwstawia się przepływowi prądu elektrycznego. Opór przewodników metalicznych nie zależy od wielkości płynącego prądu I lub przyłożonego napięcia U . Wartość prądu płynącego przez przewodnik metaliczny jest proporcjonalna do przyłożonej różnicy potencjałów (napięcia) zgodnie z równaniem (1), a współczynnikiem proporcjonalności jest właśnie opór.

$$U = R \cdot I. \quad (1)$$

Zależność przedstawiona równaniem (1) znana jest jako prawo Ohma i jest podstawą definicji jednostki oporu R w układzie SI, którą jest om (Ω).

- Metale to najbardziej charakterystyczne i najłatwiej rozpoznawalne pierwiastki w przyrodzie. Ich główne cechy to:
 - dobre przewodnictwo elektryczne,
 - dobre przewodnictwo cieplne,
 - ciągliwość i kowalność,
 - duża zdolność do odbijania światła (tzw. połysk metaliczny).

W 1900 roku Drude postawił hipotezę, że większość właściwości metali, używając dzisiejszych pojęć, da się wytłumaczyć zakładając, że elektrony walencyjne nie są przywiązane do poszczególnych atomów, nie oddziałują z nimi i mogą swobodnie poruszać się w całej objętości sieci krystalicznej metalu (przewodnika metalicznego) tworząc tzw. gaz elektronów swobodnych. Poprawność hipotezy o dużej swobodzie ruchu elektronów w metalu została eksperymentalnie udowodniona w 1916 r. przez Richarda C. Tolmana i T. D. Stewarta¹. Model elektronów swobodnych jest przybliżeniem bardzo uproszczonym, ponieważ zaniedbano w nim oddziaływanie elektronów swobodnych z rdzeniami atomowymi metalu, które ma istotny wpływ na własności gazu elektronowego. Lepszym przybliżeniem rzeczywistości jest model elektronów niezależnych,

¹ The Electromotive Force Produced by the Acceleration of Metals, Richard C. Tolman, T. Dale Stewart, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 2, No. 3 (March 15, 1916), pp. 189-192

w którym zaniedbano oddziaływania elektronów między sobą. Oddziaływania te są bardzo słabe i ujawniają się tylko w niskich temperaturach.

W nieobecności pola elektrycznego swobodne elektrony znajdują się w ciągłym i bezładnym (chaotycznym) ruchu podobnie jak cząsteczki gazu doskonałego zamkniętego w zbiorniku. Elektrony nieustannie zderzają się z rdzeniami jonowymi metalu, gwałtownie zmieniając swoją prędkość i kierunek ruchu. Średnia prędkość wszystkich elektronów swobodnych w przewodniku wynosi zero, więc wzdłuż przewodnika (np. miedzianego drutu) nie ma wypadkowego ruchu elektronów – nie płynie prąd elektryczny. Przez λ oznaczamy średnią drogę jaką elektron przebywa między kolejnymi zderzeniami, a przez τ średni czas jaki upływa między kolejnymi zderzeniami.

Gdy końce drutu podłączymy do źródła napięcia, to pod wpływem powstałego w metalu pola E chaotycznie poruszające się swobodne elektrony będą dodatkowo przyspieszane w kierunku $(-E)$ z przyspieszeniem równym:

$$a = eE/m_e, \quad (2)$$

gdzie e jest ładunkiem elektronu a m_e jego masą.

Ponieważ swobodny elektron średnio po czasie τ zderza się z rdzeniem jonowym metalu wskutek czego zaczyna poruszać się w nowym przypadkowym kierunku, średnia prędkość, tzw. prędkość unoszenia v_u , jaką elektron może uzyskać w kierunku $(-E)$ zależy od przyspieszenia elektronu i czasu jego trwania τ .

$$v_u = a \cdot \tau. \quad (3)$$

Podstawiając (2) do (3) otrzymujemy:

$$v_u = \frac{eE}{m_e} \cdot \tau. \quad (4)$$

Można pokazać, że średnia prędkość elektronów (prędkość unoszenia v_u) w przewodniku (np. w kształcie drutu) o polu powierzchni przekroju A , przez który płynie równomiernie rozłożony na przekroju S prąd, wynosi:

$$v_u = \frac{j}{ne}, \quad (5)$$

gdzie j – gęstość prądu, n – liczba elektronów na jednostkę objętości (koncentracja elektronów), ne – gęstość ładunkowa.

Łącząc równości (4) i (5) otrzymujemy:

$$\frac{eE}{m_e} \cdot \tau = \frac{j}{ne} \quad (6)$$

co po przekształceniu można zapisać jako:

$$\frac{E}{j} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{m_e}{ne^2}. \quad (7)$$

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$\rho = \frac{m_e}{r \cdot n e^2} \text{ lub } \sigma = \frac{r \cdot n e^2}{m_e}, \quad (8)$$

otrzymujemy prawo Ohma w postaci:

$$j = \frac{E}{\rho} \text{ lub } j = \sigma \cdot E. \quad (9)$$

Ponieważ ρ lub σ zależą od temperatury, to jak widać, jedyną wielkością zależną od temperatury może być jedynie τ .

Opór R przewodnika w kształcie walca o długości l i polu przekroju S wynosi:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}. \quad (10)$$

Wiążąc dwa ostatnie równania otrzymujemy:

$$R = \frac{1}{n \cdot \tau} \cdot \frac{m_e}{e^2} \cdot \frac{l}{S}. \quad (11)$$

Według równania (11) opór przewodnika metalicznego zależy od własności materiału przewodnika (czynniki $\frac{1}{n \cdot \tau}$) i jego geometrii (czynniki $\frac{l}{S}$). Czynniki $\frac{m_e}{e^2}$ jest wielkością stałą. Jeśli założymy, że czynnik $\frac{1}{n \cdot \tau}$ nie zależy od wartości natężenia przyłożonego pola E , to przewodnik podlega prawu Ohma. Zauważmy, że koncentracja elektronów n nie zależy od wartości natężenia przyłożonego pola E , tylko od rodzaju pierwiastka (metal) z jakiego jest zbudowany przewodnik. Natomiast średni czas pomiędzy zderzeniami (lub średnia droga swobodna) zależy od wypadkowej prędkości $\vec{v}_{E=0}$ oraz prędkości unoszenia $\vec{v}_u$

$$\vec{v}_w = \vec{v}_{E=0} + \vec{v}_u$$

Prędkość unoszenia jest 10 rzędów mniejsza od prędkości ruchu bezwładnego, dlatego wypadkowa prędkość elektronu, w dobrym przybliżeniu, jest równa prędkości ruchu bezwładnego

$$\vec{v}_w = \vec{v}_{E=0} + \vec{v}_u \approx \vec{v}_{E=0},$$

co jest udokumentowane doświadczalnie.

Według modelu elektronów niezależnych za opór przewodnika metalicznego odpowiedzialne są głównie zderzenia elektronów swobodnych z rdzeniami jonowymi metalu.

Dlaczego zatem opór zależy od temperatury? Średnia droga swobodna elektronu w metalu jest rzędu 200 średnic jonowych. Jest to dużo w stosunku do odległości międzyatomowych w metalu, a to oznacza, że prawdopodobieństwo rozproszenia elektronu na jonie jest małe. Załóżmy, że jest ono odwrotnie proporcjonalne do średniej drogi swobodnej lub średniego czasu między zderzeniami:

$$P_{\text{rozproszenia}} \propto \frac{1}{\lambda} \text{ lub } P_{\text{rozproszenia}} \propto \frac{1}{\tau} \quad (12)$$

Jony metalu w sieci krystalicznej nieustannie drgają względem swoich położeń równowagi (węzłów sieci krystalicznej). Amplituda drgań jonów zależy od temperatury i rośnie ze wzrostem temperatury. Zakładając, że jony wykonują drgania harmoniczne można wykazać, że kwadrat średniej x_{sr}^2 amplitudy drgań jest proporcjonalny do temperatury

$$x_{sr}^2 \propto T \quad (13)$$

Zakładając, że prawdopodobieństwo rozproszenia jest proporcjonalne do kwadratu średniej amplitudy

$$P_{\text{rozproszenia}} \propto x_{sr}^2 \quad (14)$$

co w powiązaniu z zależnością **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** otrzymamy:

$$P_{rozproszczenia} \propto T \quad (15)$$

Z połączenia zależności **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** i **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** wynika, że średni czas między kolejnymi zderzeniami jest odwrotnie proporcjonalny do temperatury przewodnika:

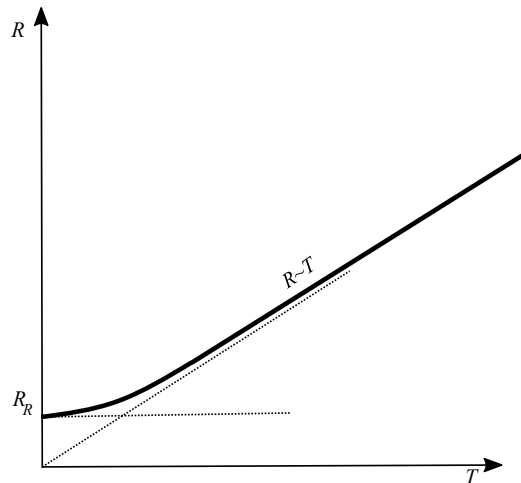
$$\tau \propto \frac{1}{T} \quad (16)$$

Ostatnia równość w połączeniu z zależnością **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** prowadzi do wniosku, że w pierwszym przybliżeniu opór przewodnika jest proporcjonalny do jego temperatury:

$$R = \frac{1}{n} \cdot \frac{m_e}{e^2} \cdot \frac{l}{S} \cdot T = \text{const} \cdot T \quad (17)$$

Z zależności **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** widać, że przy ustalonej temperaturze przewodnictwo metalu σ powinno rosnąć ze wzrostem koncentracji elektronów. Eksperyment jednak wskazuje, że przewodnictwo aluminium σ_{Al} jest mniejsze od przewodnictwa miedzi σ_{Cu} mimo, $n_{Al} = 3n_{Cu}$. Znany jest też fakt, że przewodnictwo złota (Au) jest większe od przewodnictwa miedzi (Cu) i srebra (Ag), chociaż wszystkie trzy pierwiastki szlachetne posiadają jednakowe n . Wytłumaczenie tych faktów możliwe jest tylko na gruncie mechaniki kwantowej. Oddziaływanie elektron-elektron jest zanedbywalnie małe, zaś liniowa zależność $R(T)$ jest wynikiem oddziaływania elektron-foton. Ze wzrostem temperatury liczba fotonów rośnie, dlatego rośnie także opór.

Liniowa zależność oporu od temperatury jest obserwowana dla większości metali w szerokim zakresie temperatur. Okazuje się, że w temperaturach bliskich 0K powyższe przybliżenia przestaje obowiązywać, ponieważ liczba wzbudzanych fotonów także zdąża do zera. Tak jak to pokazano na rysunku wraz ze spadkiem temperatury wartość oporu przestaje liniowo maleć i zaczyna dążyć do stałej wartości tzw. oporu resztkowego R_R . Okazuje się, że za opór resztkowy odpowiedzialne są zderzenia elektronów swobodnych z domieszkami (atomami innych pierwiastków), oraz defektami strukturalnymi sieci krystalicznej (brak atomów, zaburzenia regularnego ich ułożenia itd.). Zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej w przewodniku metalicznym o doskonałej (idealnej) strukturze krystalicznej i przy temperaturze 0K nie będą występowały zderzenia elektronów z siecią krystaliczną. Średnia droga elektronu będzie dążyła do nieskończoności $\lambda \rightarrow \infty$, a więc również średni czas między zderzeniami $\tau \rightarrow \infty$ i w konsekwencji zgodnie z równaniem **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** opór będzie dążył do zera ($R \rightarrow 0$), gdyby nie opór resztkowy.



Rysunek 1 Zależność oporu metali od temperatury, R_R - opór resztkowy

Doświadczenie pokazuje, że temperaturową zależność $R(T)$ dla metali dobrze opisuje równanie:

$$R_t = R_0(1 + \gamma t + \beta t^2) \quad (18)$$

gdzie

t -oznacza temperaturę w skali Celsjusza,

R_t -opór w temperaturze t ,

R_0 -opór w temperaturze 0°C

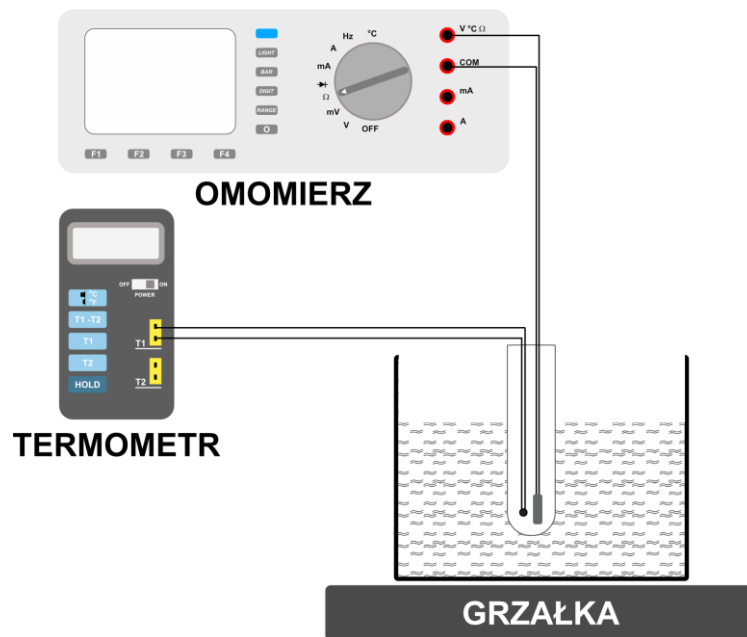
β, γ - stałe, zależne od rodzaju metalu.

Stała β jest bardzo małą liczbą, więc powyższą zależność można przybliżyć następująco:

$$R_t = R_0(1 + \gamma t) \quad (19)$$

Współczynnik γ nazywa się temperaturowym współczynnikiem oporu (rezystancji), a jego wymiarem jest $\left(\frac{1}{^\circ\text{C}}\right)$.

Układ do pomiaru temperaturowego współczynnika rezystancji metalu składa się z termostatu (naczynie + grzejnik o regulowanej mocy), termometru i omomierza. Badany element umieszcza się w termostacie w kąpielii wodnej. Schemat układu przedstawiony jest na rysunku 2.



Rysunek 2 Schemat układu pomiarowego do wyznaczania temperaturowego współczynnika rezystancji



METODOLOGIA WYKONANIA POMIARÓW

1. Napętnić naczynie mieszaniną wody z lodem.
2. Do naczynia z mieszaniną wody i lodu włożyć próbkę z czujnikiem temperatury i badanym metalem.
3. Poczekać aż temperatura kąpieli wodnej ustabilizuje się na poziomie 0 °C.
4. Połączyć obwód elektryczny według schematu przedstawionego na rysunku.
5. Gdy temperatura ustabilizuje się na poziomie 0 °C włączyć grzałkę. Pomiary temperatury T i rezystancji R wykonywać co 2-3 °C aż do osiągnięcia temperatury 90 °C.
6. Temperaturę i odpowiadającą jej rezystancję wpisywać w Tabeli pomiarowej.



Tabela pomiarowa

$Lp.$	T $^{\circ}\text{C}$	R Ω	$Lp.$	T $^{\circ}\text{C}$	R Ω	$Lp.$	T $^{\circ}\text{C}$	R Ω
1			18			35		
2			19			36		
3			20			37		
4			21			38		
5			22			39		
6			23			40		
7			24			41		
8			25			42		
9			26			43		
10			27			44		
11			28			45		
12			29			46		
13			30			47		
14			31			48		
15			32			49		
16			33			50		
17			34			51		



Obliczenia

1. Obliczyć niepewność pomiarową temperatury i rezystancji korzystając z metody typu B.
2. Sporządzić wykres zależności $R_t = f(T)$.
3. Metodą najmniejszych kwadratów do punktów pomiarowych $R_t(T)$ dopasować linię prostą $y = ax + b$, gdzie $y = R_t$, $x = T$, znajdując a , b , $u(a)$, $u(b)$.
4. Obliczyć temperaturowy współczynnik rezystancji γ przez porównanie równania prostej z przekształconą zależnością $R_t = R_0(1 + \gamma T) = R_0 + R_0\gamma T$, skąd $R_0 = b$, $R_0\gamma = a$.
5. Niepewność wyznaczenia współczynnika temperaturowego rezystancji $u(\gamma)$ obliczyć z prawa przenoszenia niepewności, bazując na zależności $\gamma = \frac{a}{R_0}$, czyli $\gamma = \frac{a}{b}$. Jednak ponieważ obliczone współczynniki prostej a i b są skorelowane, uwzględnić także współczynnik korelacji r :

$$u(\gamma) = \sqrt{\left[\frac{\partial \gamma}{\partial a} u(a)\right]^2 + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial b} u(b)\right]^2 + 2r \frac{\partial \gamma}{\partial a} \frac{\partial \gamma}{\partial b} u(a)u(b)} \quad \text{gdzie} \quad r = -\frac{\sum_{i=1}^n T_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n T_i^2}}$$

Należy podać jawne wyrażenia na powyższe pochodne.