

Wyznaczanie ładunku właściwego $\frac{e}{m}$ elektronu

Wymagania do ćwiczenia

1. Wielkości opisujące pole elektryczne i magnetyczne.
2. Zachowanie się ładunków elektrycznych w polu elektrycznym i magnetycznym.

Literatura

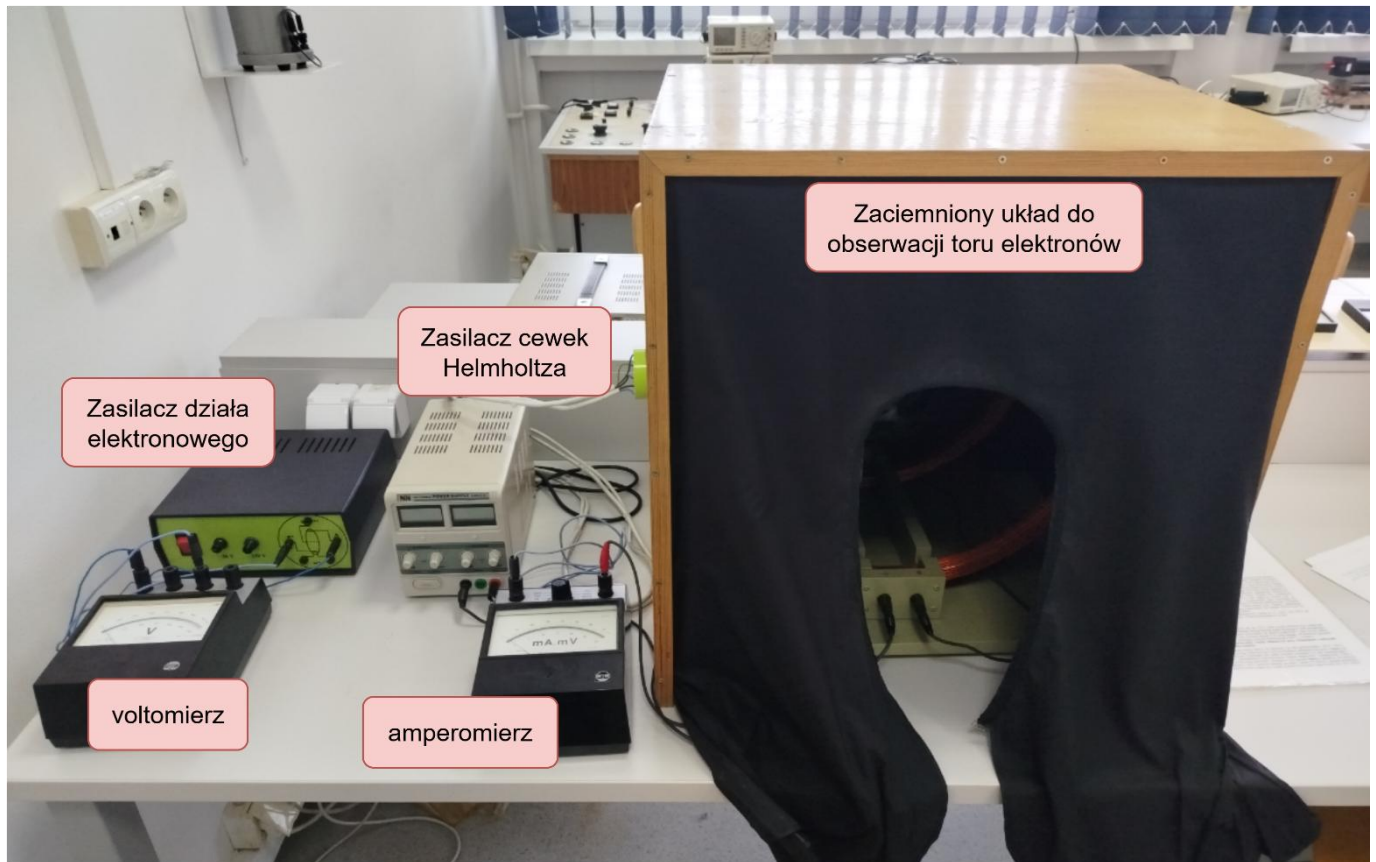
1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, t. 3, PWN, Warszawa 2005, str. 19-25, 33-35, 73-78, 89-90, 185-189, 195-199, 219-220, 223
2. OpenStacks, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 2, Rozdział 11.3: [Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym](#).

Przykładowe pytania

1. Co to znaczy, że ładunek jest skwantowany? Podaj jednostkę ładunku elektrycznego w układzie SI.
2. Sformułuj prawo Coulomba.
3. Czym jest pole wektorowe?
4. Podaj wielkości opisujące pole elektryczne i magnetyczne.
5. Podaj wzór na siłę Lorentza.
6. Sformułuj prawa Biota-Savarta i przedstaw jak go zastosować.
7. Jaką własność pola magnetycznego zapewnia układ cewek Helmholtza?
8. Wyjaśnij, dlaczego tor elektronu w jednorodnym polu magnetycznym ma kształt okręgu (przy prędkości prostopadłej do linii pola).
9. Jak można przyspieszyć elektrony przed wprowadzeniem ich do pola magnetycznego?

Przyrządy pomiarowe / stanowisko pomiarowe

Woltomierz, miliamperomierz

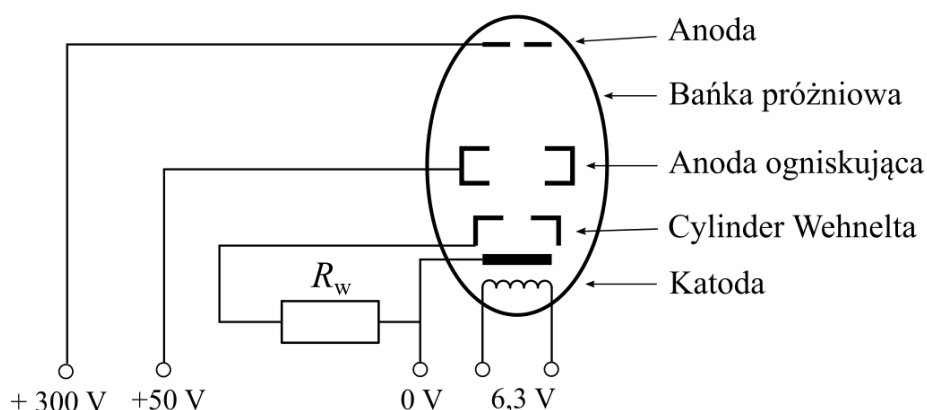


WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Idea pomiaru

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie ładunku właściwego elektronu, czyli stosunku $\frac{e}{m}$, za pomocą badania ruchu ładunku w polu elektrycznym i magnetycznym. Elektrony emitowane są przez katodę działu elektronowego, przedstawionego na Rys. 1. Emisja elektronów zachodzi na skutek podgrzania katody za pomocą zasilacza o napięciu 6,3 V. Cylinder Wehnelta ma za zadanie wydzielenie z całego strumienia elektronów wąskiej wiązki. Posiada on ujemny potencjał na skutek bombardowania go przez elektrony i dlatego dodatkowo reguluje natężenie wiązki elektronów. Na swojej dalszej drodze elektrony są przyspieszane w polu elektrycznym o napięciu U , równym ok. 300 V, wytworzonym przez układ katoda-anoda i ogniskowane przez pole elektryczne wytworzone przez dodatkową anodę o napięciu około +50 V względem katody.



Rys. 1. Schemat działu elektronowego.

Prędkość v elektronów opuszczających dział można obliczyć z zasady zachowania energii. Przyrost energii kinetycznej elektronu o masie m , na drodze od katody do anody, wynosi:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2}$$

i zachodzi on przy jednoczesnym zmniejszeniu się energii potencjalnej elektronu w polu elektrostatycznym:

$$\Delta E_p = eU$$

Z zasady zachowania energii wiadomo, że przyrost energii ΔE_k musi być równy spadkowi ΔE_p , skąd dostajemy

$$v = \sqrt{2U \frac{e}{m}} \quad (1)$$

Biegająca z taką prędkością wiązka elektronów opuszcza działo elektronowe i dostaje się w obszar w przybliżeniu jednorodnego pola magnetycznego o liniach skierowanych prostopadle do kierunku prędkości $\vec{v}$. Na każdy elektron działa pochodząca od pola siła magnetyczna (siła Lorentza) $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, skierowana prostopadle do linii pola i prostopadle do prędkości (Rys. 2). Siła ta pełni rolę siły dośrodkowej w ruchu elektronu po okręgu, czyli

$$evB = \frac{mv^2}{r}$$

z czego otrzymujemy:

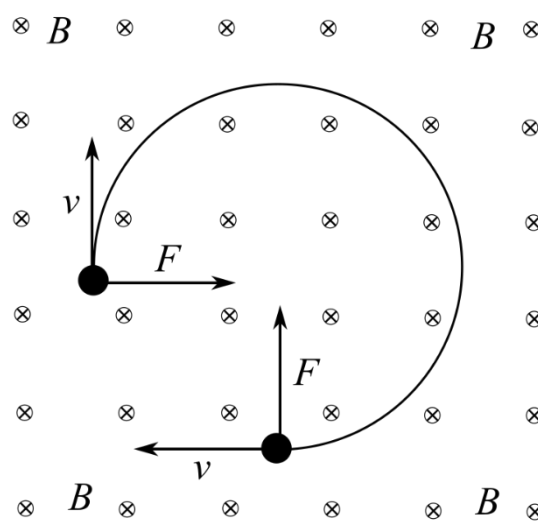
$$\frac{e}{m} = \frac{v}{Br}$$

Po wstawieniu prędkości v danej wzorem (1), możemy napisać:

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{Br} \sqrt{2U \frac{e}{m}}$$

Skąd wyznaczamy ładunek właściwy elektronu

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \quad (2)$$



Rys. 2. Ruch elektronu w polu magnetycznym



Wyznaczenie indukcji pola magnetycznego

W zestawie laboratoryjnym pole magnetyczne wytworzone jest przez dwie cewki o promieniu R umieszczone współosiowo w równoległych płaszczyznach oddalonych o $2d$. Każda cewka składa się z N zwojów. Układ takich cewek jest przedstawiony schematycznie na Rys. 3. W celu obliczenia indukcji pola magnetycznego w punkcie P , położonym w jednakowej odległości d od obu cewek i odległym o r od osi cewek, podzielimy każdą cewkę na nieskończenie małe odcinki o długości $d\ell$. W każdym odcinku $d\ell$ płynie prąd NI , a jeden z takich odcinków, którego wektor wodzący $\vec{R}$ tworzy z wektorem wodzącym $\vec{r}$ punktu P kąt φ , jest narysowany na Rys. 3. Pole magnetyczne w punkcie P wytworzone przez ten odcinek z prądem zależy od odległości r' punktu P od odcinka $d\ell$. Dlatego najpierw zajmiemy się wyznaczeniem wektora $\vec{r}'$. Można go obliczyć z wektorów $\vec{R}$, $\vec{d}$ i $\vec{r}$:

$$\vec{r}' = -\vec{R} + \vec{d} + \vec{r} \quad (3)$$

a ponieważ wektory te są równe:

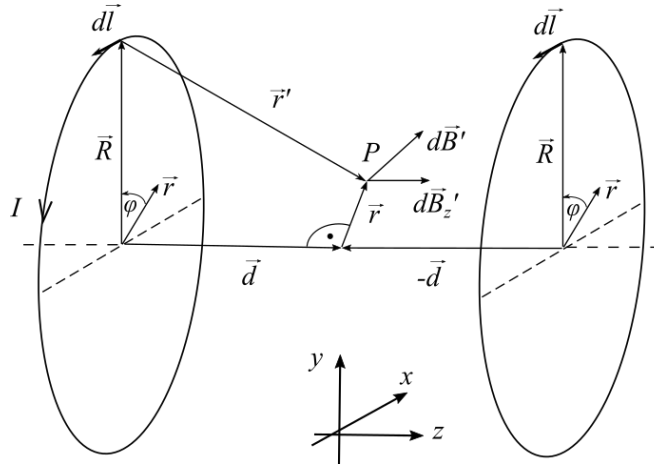
$$\vec{R} = [0, R, 0] \quad \vec{d} = [0, 0, d] \quad \vec{r} = [r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0]$$

to wektor

$$\vec{r}' = [r \sin \varphi, -(R - r \cos \varphi), d]$$

Długość wektora $\vec{r}'$ jest równa:

$$r = \sqrt{(r \sin \varphi)^2 + (R - r \cos \varphi)^2 + d^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi + d^2} \quad (4)$$



Rys. 3. Układ dwóch cewek z prądem

Przyczynk do wektora indukcji pola magnetycznego w punkcie P, wytworzony przez mały odcinek dl z prądem NI położony na lewej cewce, wyznaczamy z prawa Biota-Savarta:

$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}'}{r'^3} \quad (5)$$

Iloczyn wektorowy w powyższym wzorze można wyznaczyć za pomocą zależności (3) wektora $\vec{r}'$ od wektorów $\vec{R}$, $\vec{d}$ i $\vec{r}$, co daje:

$$d\vec{l} \times \vec{r}' = d\vec{l} \times (-\vec{R}) + d\vec{l} \times \vec{d} + d\vec{l} \times \vec{r} \quad (6)$$

Każdy z trzech iloczynów wektorowych w powyższym wzorze można łatwo obliczyć co do wartości, ponieważ znamy kąty pomiędzy tworzącymi je wektorami, i co do kierunku, ponieważ wiemy że wynik mnożenia wektorowego jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej oba wektory.

Na podstawie zależności (6), otrzymujemy:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = [0, dl \cdot d, dl \cdot (R - r \cos \varphi)]$$

co pozwala wyznaczyć ze wzoru (5) przyczynę $d\vec{B}'$ do wektora indukcji pola, pochodzący od małego odcinka dl :

$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0 NI dl}{4\pi r'^3} [0, d, R - r \cos \varphi]$$

Należy także uwzględnić przyczynę $d\vec{B}''$ do pola magnetycznego w punkcie P , pochodzący od analogicznego odcinka o długości dl , położonego na prawej cewce (Rys. 3). Obliczenie będzie przebiegać analogicznie, z rysunku widać też, że w tym przypadku należy użyć do obliczeń wektory $\vec{R}$, $\vec{r}$ i $-\vec{d}$ oraz długość $r'' = r'$ wektora łączącego odcinek dl na prawej cewce z punktem P . Dlatego od razu możemy napisać wzór na przyczynę pola $d\vec{B}''$:

$$d\vec{B}'' = \frac{\mu_0 NI dl}{4\pi r'^3} [0, -d, R - r \cos \varphi]$$

W wyniku dodania obu wektorów otrzymamy:

$$d\vec{B} = d\vec{B}' + d\vec{B}'' = \frac{\mu_0 NI dl}{2\pi r'^3} [0, 0, R - r \cos \varphi]$$

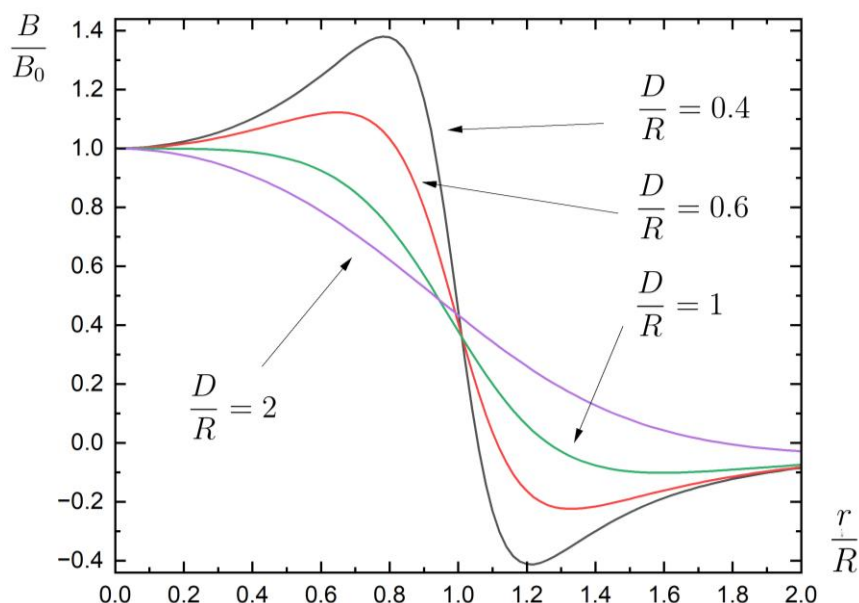
Widać, że wektor $d\vec{B}$ ma składową tylko w kierunku osi z i dlatego od razu możemy podać jego wartość, dodatkowo wstawiając odległość r' z zależności (4):

$$dB = \frac{\mu_0 NI dl (R - r \cos \varphi)}{2\pi r'^3} = \frac{\mu_0 NI dl (R - r \cos \varphi)}{2\pi (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

W celu wyznaczenia całkowitego pola magnetycznego w punkcie P , należy uwzględnić wszystkie przyczynki $d\vec{B}$ pochodzące od wszystkich elementów dl z prądem. Z zasady superpozycji dla pól magnetycznych wynika, że całkowita indukcja $\vec{B}$ jest sumą wektorową wszystkich $d\vec{B}$, czyli $\vec{B} = \int d\vec{B}$. Ponieważ, jak pokazaliśmy wyżej, dla dwóch odpowiadających sobie elementów dl położonych dowolnie na dwóch cewkach, przyczynę $d\vec{B}$ ma tylko składową z -ową, to $B = \int dB$. Wykorzystując wzór (7) oraz biorąc pod uwagę, że $dl = R d\varphi$, dostajemy:

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 NI (R - r \cos \varphi) R d\varphi}{2\pi (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

Powyższa całka nie wyraża się przez funkcje elementarne, jednak można ją obliczyć numerycznie dla różnych stosunków r/R oraz D/R , gdzie $D = 2d$ jest odległością cewek. Wynik obliczeń jest przedstawiony na Rys. 4. Indukcję B wyrażono bezwymiarowo, jako stosunek B/B_0 gdzie B_0 , jest indukcją pola na osi cewek, czyli dla $r = 0$.



Rys. 4. Wykres zależności indukcji B pola magnetycznego od odległości r od osi cewek, w jednostkach bezwymiarowych B/B_0 i r/R , dla różnych bezwymiarowych odległości cewek D/R .

Z wykresu widać, że najbardziej jednorodne pole w niewielkich odległościach r od osi cewek ($r < 0.3R$) otrzymuje się dla stosunku D/R równego 1. Układ cewek w takiej wzajemnej odległości nazywa się od nazwiska odkrywcy konfiguracja Helmholtza.

Indukcję B_0 , na osi cewek można obliczyć, wstawiając do wzoru (8) $r = 0$, co daje:

$$B_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NIR^2 d\varphi}{(\sqrt{R^2 + a^2})^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NIR^2}{(\sqrt{R^2 + d^2})^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 \frac{NIR^2}{(\sqrt{R^2 + d^2})^3} \quad (9)$$

Dla $D = R$, czyli dla $d = 0.5R$, otrzymamy z powyższego wzoru całkowitą indukcję na osi cewek w konfiguracji Helmholtza:

$$B_0 = 0.7155\mu_0 \frac{NI}{R} \quad (10)$$

Wiązka elektronów, użyta w doświadczeniu, porusza się w obszarze przyosiowym, nie przekraczając odległości $0.3R$ od osi. Numeryczne obliczenie indukcji ze wzoru (8) w konfiguracji Helmholtza dla odległości $r = 0.3R$ daje wynik różniący się o 0.38 % od wartości B_0 , na osi. Oznacza to, że z taką właśnie dokładnością zapewniona jest jednorodność pola w rozpatrywanym zakresie odległości. Ponieważ promień cewek użytych

w zestawie laboratoryjnym wynosi $R = 0.210$ m, a liczba zwojów $N = 154$, to stałe wielkości we wzorze (10) można zastąpić jedną stałą K , co daje ostateczny wzór na indukcję pola magnetycznego:

$$B = K \cdot I \quad (11)$$

gdzie $K = 0.6578 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}}$

Przy wyznaczaniu wartości indukcji B istotnym jest dokładny pomiar natężenia prądu I w cewkach Helmholtza.



Średnia ważona

W sytuacji gdy dysponujemy szeregiem wartości x_i charakteryzujących się różnymi niepewnościami $u(x_i)$, ostateczny wynik obliczyć metodą średniej ważonej, jako wagi w_i przyjmując odwrotności kwadratów niepewności składowych:

$$x_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{gdzie} \quad w_i = \frac{1}{[u(x_i)]^2} \quad (12)$$

Niepewność tak wyznaczonej średniej można obliczyć dzięki zastosowaniu prawa przenoszenia niepewności do powyższego wzoru, co daje:

$$u(x_{sr}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}} \quad (13)$$



Metodologia wykonywania pomiarów

Opis układu pomiarowego

Układ pomiarowy przedstawiony jest na Rys. 5. Układ dwóch współosiowych cewek, z których każda składa się z $N = 154$ zwojów, wytwarza pole magnetyczne. Odległość D między cewkami jest równa ich promieniowi $D = R = 0.210$ m. Dla takiej konfiguracji, wytworzone pole jest w przybliżeniu jednorodne w przestrzeni wewnątrz bańki szklanej i skierowane wzdłuż osi cewek. W bańce tej znajduje się działło elektronowe. Wytworzona przez nie wiązka elektronów porusza się w polu magnetycznym po łuku okręgu. Wewnątrz lampy znajduje się metalowa drabinka pokryta farbą świecącą pod wpływem padających elektronów, pozwalająca na dokładny pomiar średnicy toru ich ruchu. Bańka jest wypełniona rozrzedzonym argonem pod ciśnieniem 0.1 Pa. Gaz ten odgrywa ważną rolę w doświadczeniu, ponieważ elektrony zderzając się z cząsteczkami gazu powodują ich jonizację. Na skutek rekombinacji jonów argonu zachodzi zjawisko luminescencji i możliwa staje się obserwacja toru ruchu elektronów. Jednocześnie jony argonu, oddziałując elektrostatycznie z elektronami, przeciwdziałają rozpraszaniu się wiązki elektronowej na skutek elektrostatycznego odpychania się elektronów.

Zadaniem zasilacza napięciowego jest dostarczenie napięć 6.3 V, 50 V oraz 250÷300 V do działła elektronowego, a zasilacza prądowego – dostarczenie prądu do cewek.



Kolejność wykonywanych czynności

1. Sprawdzić kompletność zestawu przedstawionego na rysunku 5 oraz zidentyfikować wszystkie jego elementy

Uwaga! Połączeń przewodów należy dokonywać przy wyłączonych zasilaczach ze względu na wysokie napięcie.

2. Przed uruchomieniem lampy należy się upewnić, czy oba potencjometry »-50V« i »250V« zasilacza napięciowego ustawione są w lewym skrajnym położeniu. Dopiero po włączeniu i okresie rozgrzania (ok. jedna minuta) uruchamia się oba potencjometry i obserwuje w zaciemnionym pomieszczeniu

wiązkę elektronów. Potencjometr »250V« przekręcić w dowolne położenie, ustalając w ten sposób napięcie anodowe. Za pomocą potencjometru »-50V« ustawić napięcie na siatce i przez to ostrość i jasność promienia. Pełną intensywność osiąga się z reguły dopiero po okresie rozgrzewania od 2 do 3 minut. Zapisać wtedy napięcie anoda-katoda U i od tej pory nie zmieniać położenia potencjometrów.

Uwaga! Przy dłuższych przerwach w pomiarach zaleca się przekręcenie obu potencjometrów ponownie w lewe skrajne położenie.

3. Włączyć zasilanie prądu płynącego przez cewki Helmholtza i zaobserwować kołowy tor elektronów w gazie. **Maksymalny prąd płynący przez cewkę wynosi 5 A.**
4. Regulując prąd płynący przez cewki uzyskać taki tor ruchu, aby przecinał on kolejne szczeble drabinki pomiarowej, które znajdują się w odległości kolejno 4, 6, 8 i 10 cm od działła elektronowego. Dla każdej z tych odległości zapisać średnicę toru d i natężenie prądu I .
5. **Wyłączyć oba zasilacze bezpośrednio po zakończeniu pomiarów.**
6. Zanotować niepewności maksymalne ΔU , ΔI mierzonych wielkości (działki elementarne). Jako niepewność maksymalną średnicy toru wiązki przyjąć szerokość drabinki, czyli $\Delta d = 1 \text{ mm}$.



Tabela pomiarowa

Wielkości mierzone							Wielkości obliczane			
U	ΔU	d	Δd	r	I	ΔI	$u(U)$	$u(d)$	$u(r)$	$u(I)$
[V]	[V]	[cm]	[cm]	[cm]	[A]	[A]	[V]	[cm]	[cm]	[A]



Obliczenia

1. Dla każdej średnicy d toru obliczyć jego promień r .
2. Dla każdego prądu I obliczyć indukcję B ze wzoru:

$$B = K \cdot I; \quad K = 0,6578 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (14)$$

3. Dla każdej pary (r, I) obliczyć ładunek właściwy elektronu $\frac{e}{m}$ ze wzoru:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 \cdot r^2} \quad (15)$$

- Obliczyć niepewności standardowe $u(U)$, $u(I)$, $u(d)$ z niepewności maksymalnych metodą typu B. Niepewność $u(r)$ obliczyć metodą przenoszenia niepewności: $u(r) = u(d)/2$.
- Dla każdego pomiaru z niepewności $u(I)$ obliczyć niepewność standardową $u(B)$ metodą przenoszenia niepewności, bazując na wzorze (14) (podać wyrażenia na odpowiednią pochodną).
- Dla każdego pomiaru z niepewności $u(U)$, $u(r)$, $u(B)$ obliczyć niepewność $u\left(\frac{e}{m}\right)$ metodą przenoszenia niepewności, bazując na wzorze (15) (podać wyrażenia na odpowiednie pochodne).
- Ponieważ obliczone wartości $\frac{e}{m}$ charakteryzują się różnymi niepewnościami $u\left(\frac{e}{m}\right)$, ostateczny wynik $\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{sr}}$ oraz $u\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{sr}}$ obliczyć metodą średniej ważnej według wzorów (12) i (13).
- Poprawnie zapisać ostateczny wynik pomiaru ładunku właściwego elektronu, wraz z niepewnością. Porównać też otrzymany ładunek właściwy z wartością tablicową za pomocą jego niepewności.



Tabela z wynikami obliczeń

B	$u(B)$	$\frac{e}{m}$	$u\left(\frac{e}{m}\right)$	$\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{sr}} \pm u\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{sr}}$
[T]	[T]	[C·kg ⁻¹]	[C·kg ⁻¹]	[C·kg ⁻¹]