

Wyznaczanie pojemności kondensatora i stałej czasowej obwodu z krzywej rozładowania kondensatora

Wymagania do ćwiczeń

1. Pole elektryczne – natężenie pola elektrycznego i potencjał.
2. Pojemność kondensatora.
3. Ładowanie i rozładowanie kondensatora.
4. Stała czasowa obwodu.

Literatura:

1. I.W. Sawieliew, Wykład z fizyki t.2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, str. 22-31, 107-110
2. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 2, Rozdział 8 [Pojemność elektryczna](#).
3. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 2, Rozdział 10.5 [Obwody RC](#).

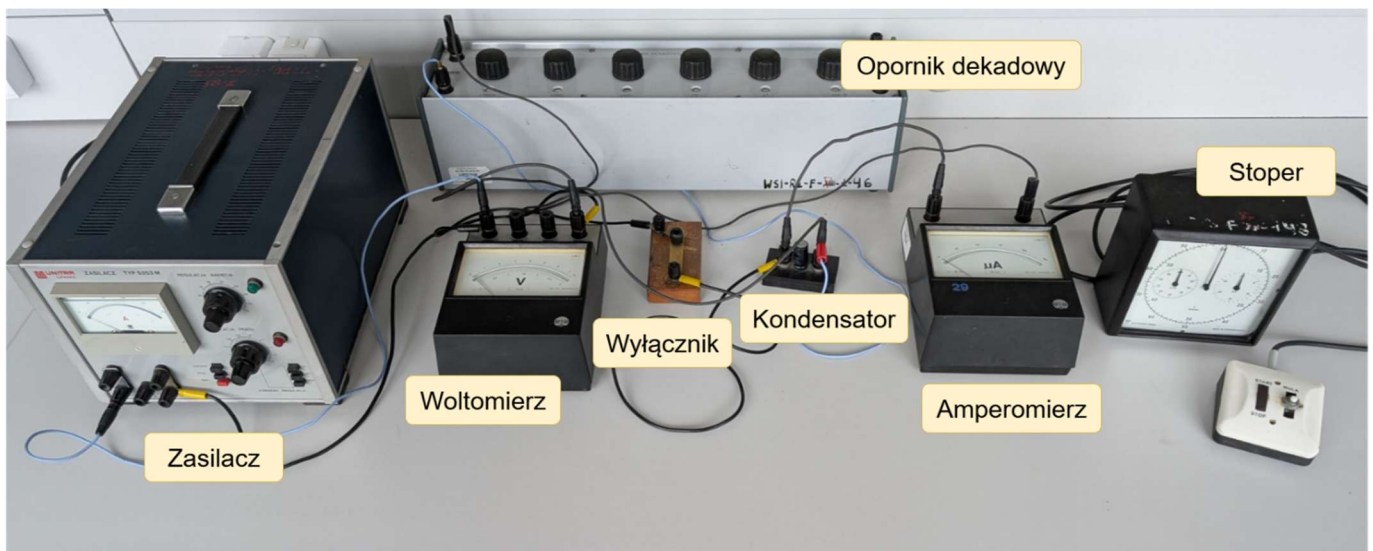
Przykładowe pytania

1. Zdefiniuj czym jest pole elektryczne. Wymień i zdefiniuj wielkości fizyczne, które mogą posłużyć do opisu pola elektrycznego.
2. Do czego służy kondensator? Jakie rodzaje kondensatorów są wykorzystywane w różnych układach elektronicznych.
3. Omów budowę kondensatora elektrolitycznego.
4. Co to jest opór elektryczny. Sformułuj prawo Ohma.
5. Jak kondensator zachowuje się w obwodzie prądu stałego, a jak w obwodzie prądu przemiennego?
6. Podaj definicję pojemności kondensatora, w jakich jednostkach wyrażamy pojemność kondensatora. Podaj najbardziej typowe wartości pojemności kondensatorów.

7. Wyjaśnij, jak obliczyć ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora korzystając z krzywej rozładowania kondensatora $I(t)$.
8. Jak wyznaczyć pojemność kondensatora płaskiego na podstawie jego wymiarów geometrycznych?
9. Jak wygląda krzywa ładowania i rozładowania typowego kondensatora?
10. Co to jest stała czasowa obwodu elektrycznego. Jak wyznaczyć stałą czasową obwodu z krzywej rozładowania kondensatora.
11. Co to jest stała czasowa obwodu elektrycznego. Jak wyznaczyć stałą czasową obwodu z ładunku zgromadzonego na kondensatorze, napięcia i oporu, przez który następuje rozładowanie.

Przyrządy pomiarowe

1. Zasilacz prądu stałego.
2. Kondensator, opornik dekadowy.
3. Mikroamperomierz, woltomierz.
4. Stoper.



Rys. 1. Układ pomiarowy.

WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Wstęp

Pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$ działa na ładunek q siłą $\vec{F} = q\vec{E}$. Natomiast w przewodniku umieszczonym w polu elektrycznym ładunki znajdujące się w nim będą w równowadze jeśli:

- Natężenie pola w każdym punkcie wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$, co oznacza, że potencjał wewnątrz przewodnika $\varphi = \text{const}$, powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną,
- Natężenie pola w każdym punkcie powierzchni przewodnika musi być prostopadłe do tej powierzchni $\vec{E} = \vec{E}_n$, gdzie indeks n oznacza kierunek prostopadły (normalny) do powierzchni.

Potencjał φ wytworzony w dowolnym (ale ustalonym) punkcie przestrzeni przez ładunek Q zgromadzony na przewodniku jest proporcjonalny do tego ładunku:

$$\varphi \sim Q \quad \text{lub} \quad C\varphi = Q$$

Współczynnik proporcjonalności C nosi nazwę pojemności elektrycznej przewodnika. Wyrażenie

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad \text{lub} \quad C = \frac{Q}{U} \quad (1)$$

gdzie $U = \varphi_2 - \varphi_1$ jest napięciem, czyli różnicą potencjałów, definiuje też jednostkę pojemności elektrycznej przewodnika – farad (F). Przewodnik ma pojemność równą 1 F, jeśli zgromadzony na nim ładunek $Q = 1$ C wytwarza potencjał $\varphi = 1$ V:

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

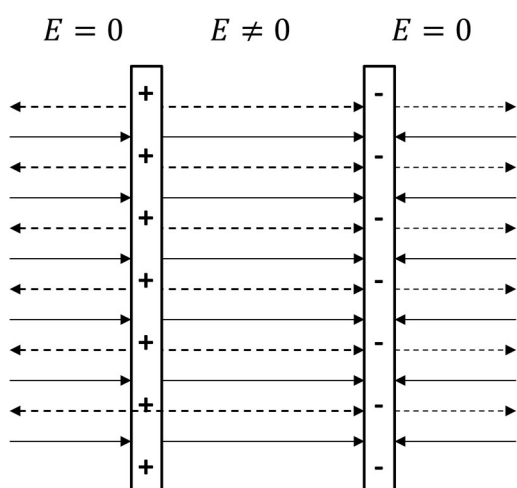
Pojemność przewodników odosobnionych jest niewielka, np. pojemność 1 F miałyby odosobniona kula o promieniu $9 \cdot 10^9$ m (1500 razy większym od promienia Ziemi). Dlatego w praktyce używa się jednostek, które są podwielokrotnością farada - milifarad (mF), mikrofarad (μF), nanofarad (nF) pikofarad (pF).

Jeśli w otoczeniu przewodnika znajdują się inne ciała, to pojemność tego przewodnika wzrasta - pod działaniem pola wytwarzanego przez naładowany przewodnik w ciele umieszczonym w jego pobliżu powstają ładunki indukowane (jeżeli tym drugim ciałem jest przewodnik) lub ładunki związane (jeżeli tym drugim ciałem jest dielektryk).



Kondensatory

Kondensatory – są to urządzenia pozwalające na gromadzenie stosunkowo dużego ładunku przy ich niewielkich, w stosunku do otoczenia, rozmiarach. Kondensatory wykonuje się zwykle z dwóch przewodników



Rys. 2. Pole elektryczne wokół dwóch naładowanych elektrod

(okładek) umieszczonych blisko siebie. Kształt okładek powinien być taki, aby pole wytwarzane przez ładunek znajdujący się na okładkach, było prawie całkowicie w nim zawarte. Warunek ten jest w przybliżeniu spełniony np. dla dwóch naładowanych płyt. Natężenie pola elektrycznego jednej naładowanej, nieskończenie rozciągniętej płyty

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2)$$

nie zależy od odległości, a σ jest gęstością powierzchniową ładunku. Jest to wniosek z prawa Gaussa dla pola elektrycznego.

Na Rys. 2 przedstawione są linie sił pola pochodzącego od dodatniej okładki (linia przerywana) i linie pola od ujemnej okładki (linia ciągła). Są one idealnie prostopadłe do powierzchni okładek kondensatora. Takie zachowanie jest ściśle tylko dla nieskończonej płaskiej płyty. W praktyce okładki kondensatora mają skończone rozmiary i blisko brzegu natężenia pola elektrycznego pochodzące od lewej i prawej płyty nie są idealnie do siebie równoległe, przez co nie znoszą się do zera na zewnątrz. Jednak ze względu na małą odległość między płytami jest to zaniedbywalne. Dlatego, co widać z Rys. 2, pole pochodzące od ładunku dodatniego znoś się z polem pochodzącym od ładunku ujemnego na zewnątrz okładek, wewnątrz okładek pola te sumują się, czyli na podstawie (2)

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

a ponieważ powierzchniowa gęstość ładunku $\sigma = \frac{Q}{S}$, gdzie S jest powierzchnią okładki, to

$$E = \frac{Q}{S\epsilon_0} \quad (3)$$

Dla jednorodnego pola elektrycznego wytworzonego przez kondensator płaski obowiązuje zależność

$$E = \frac{U}{d} \quad (4)$$

gdzie U jest napięciem pomiędzy okładkami odległymi od siebie o d .

Pojemność kondensatora według wzoru (1):

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}$$

Łącząc ze sobą trzy powyższe wzory dostajemy pojemność płaskiego kondensatora próżniowego:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (5)$$

Podobnie można wyprowadzić wzór na pojemność próżniowego kondensatora cylindrycznego:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

l – długość kondensatora, R_1, R_2 – promienie wewnętrznej i zewnętrznej okładki kondensatora.

Pojemność próżniowego kondensatora kulistego:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

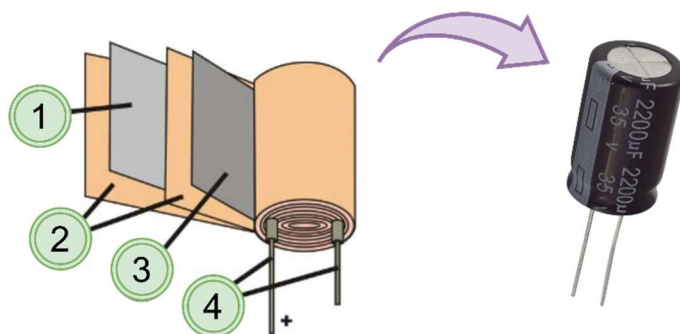
R_1, R_2 – promienie wewnętrznej i zewnętrznej okładki kondensatora.

Umieszczenie dielektryka wewnątrz kondensatora powoduje zwiększenie pojemności kondensatora o czynnik ε_r – względną przenikalności dielektryka. Jest to liczba, która mówi, ile razy przenikalność elektryczna danego ośrodka jest większa od przenikalności próżni:

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad (6)$$

gdzie C jest pojemnością kondensatora z dielektrykiem, zaś C_0 pojemnością kondensatora próżniowego.

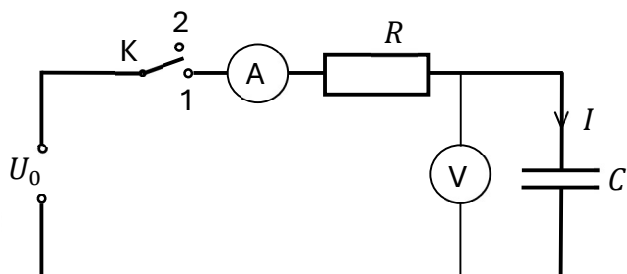
Jednymi z powszechnie stosowanych typów kondensatorów w różnego rodzaju układach elektronicznych są kondensatory elektrolityczne. W tych kondensatorach, rolę jednej z elektrod pełni elektrolit, a drugą elektrodą jest cienka warstwa metalowa oddzielona od elektrolitu dielektrykiem. Taka konstrukcja pozwala na pozyskanie większej pojemności w stosunku do rozmiaru kondensatora niż w przypadku innych rodzajów kondensatorów. Kondensator elektrolityczny został wynaleziony i opatentowany w 1896 roku przez polskiego elektrotechnika i przemysłowca Karola Pollaka.



Rys. 3. Budowa kondensatora elektrolitycznego. 1) folia aluminiowa, 2) izolator, 3) elektroda 4) wyprowadzenia



Ładowanie kondensatora



Proces ładowania kondensatora można przeprowadzić w układzie przedstawionym na rysunku, jeżeli klucz K przełączymy w pozycję 1. W chwili początkowej, $t = 0$, na kondensatorze ładunek $Q = 0$ i napięcie $U = 0$ zgodnie z (1). Podczas ładowania ilość ładunku zwiększa się, w obwodzie płynie prąd I dostarczający do

kondensatora ładunek dQ w przedziale czasu dt :

$$dQ = Idt$$

Ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora po upływie czasu t otrzymujemy po scałkowaniu:

$$Q = \int_0^t Idt \quad (7)$$

Napięcie pomiędzy okładkami kondensatora według wzoru (1):

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

również zależy od czasu, co otrzymujemy z dwóch powyższych równań:

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t Idt$$

Spadek potencjału czyli napięcie na rezystorze R według prawa Ohma:

$$U_R = IR \quad (8)$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa napięcia w obwodzie na rysunku spełniają równanie:

$$U_0 = U_C + U_R$$

czyli wstawiając:

$$U_0 = \frac{1}{C} \int_0^t Idt + IR \quad (9)$$

Z ostatniej zależności można wyznaczyć natężenie prądu jako funkcję czasu. Po obustronnym różniczkowaniu otrzymamy:

$$0 = \frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt}$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy proste równanie różniczkowe

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}$$

które po scałkowaniu daje:

$$\ln(I) = -\frac{t}{RC} + \text{const} \quad \text{lub} \quad I = e^{\text{const}} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

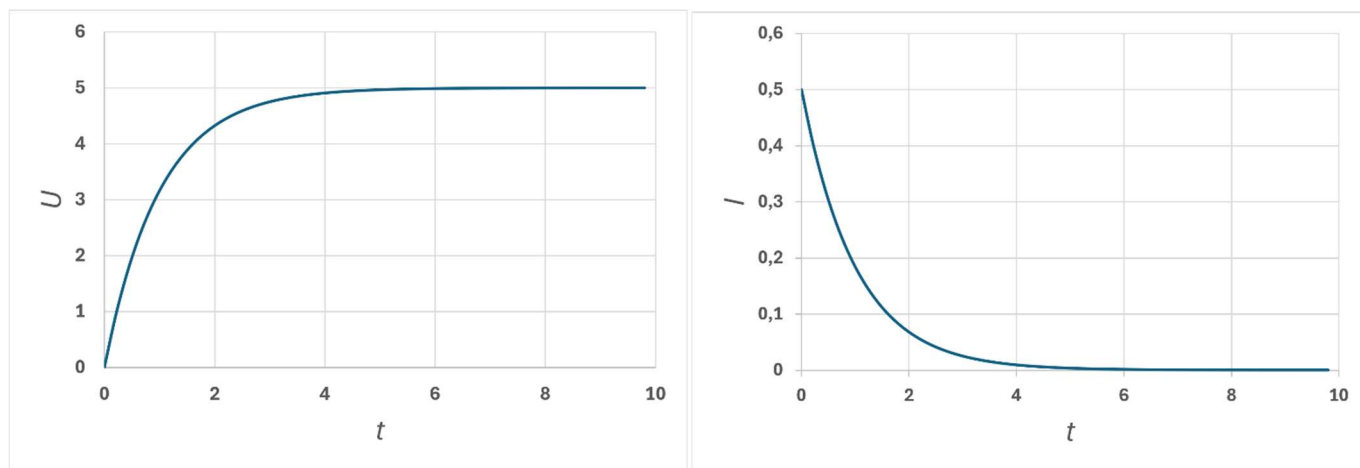
Wstawiając warunki początkowe $t = 0$, $U_C = 0$, $I = I_0$ otrzymamy $I_0 = e^{\text{const}}$. Dlatego natężenie prądu ładowania

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10)$$

Napięcie między okładkami kondensatora w czasie ładowania wynosi

$$U_C = U_0 - U_R = U_0 - IR = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

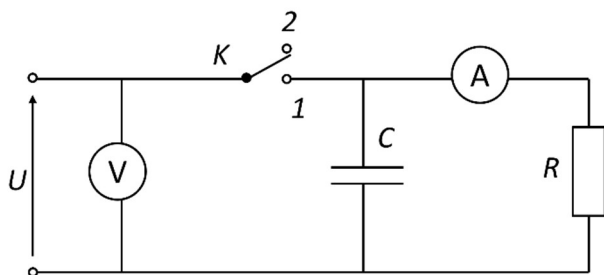
Poniżej przedstawiono zależności $U(t)$, $I(t)$:



Rys. 4. Napięcie i prąd na okładkach kondensatora podczas ładowania.



Rozładowanie kondensatora



wynosi $U_0 = U$. Natomiast w każdej chwili czasu obowiązuje drugie prawo Kirchhoffa:

$$U_C = U_R \quad (11)$$

Po upływie czasu t ładunek na okładce kondensatora zmniejszy się zgodnie ze wzorem (7) o $Q = \int_0^t I dt$ i napięcie na kondensatorze zmniejszy się o wartość wyrażoną wzorem (1):

$$U_C = U_0 - \frac{Q}{C} = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I dt = U_R = IR$$

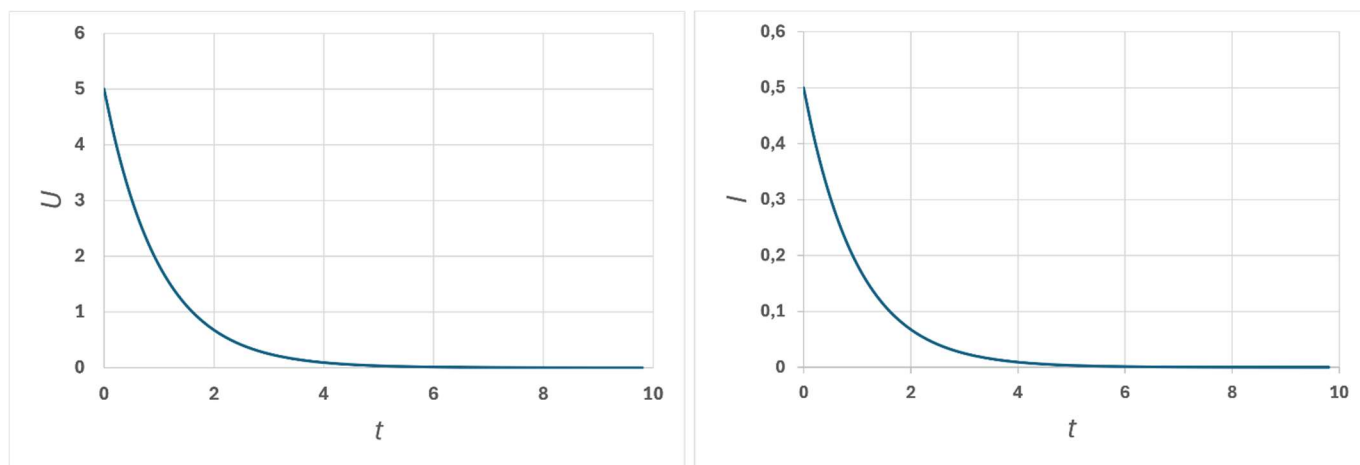
gdzie na końcu powyższej równości zastosowano też prawo Kirchhoffa (11) razem z prawem Ohma (8).

Przekształcając podobnie, jak przy ładowaniu kondensatora, zwłaszcza że powyższe równanie jest takie samo jak (9), otrzymujemy, że natężenie prądu rozładowania kondensatora wyrazi się taką samą zależnością jak natężenie prądu ładowania:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I_0 = \frac{U}{R} \quad (12)$$

Ponieważ napięcie pomiędzy okładkami kondensatora $U_C = U_R = IR$, to zmienia się ono w czasie jak

$$U_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13)$$



Rys. 5. Napięcie i prąd na okładkach kondensatora podczas rozładowania.

Występujący w ostatnich równaniach iloczyn RC , zależny od pojemności kondensatora i rezystancji obwodu, ma wymiar czasu i nazywany jest stałą czasową obwodu,

$$\tau = RC. \quad (14)$$

Dla $t = \tau$ prąd ładowania (rozładowania) maleje e -krotnie (e – podstawa logarytmu naturalnego), co otrzymujemy z zależności (12) na prąd rozładowania $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$:

$$\text{dla } t = \tau, \quad I = \frac{I_0}{e} \quad (15)$$

Z tego też powodu stałą czasową τ nazywamy czasem relaksacji.

Natężenie prądu rozładowania, po zlogarytmowaniu zależności $I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, możemy przedstawić w postaci:

$$\ln(I) = \ln(I_0) - \frac{t}{RC}$$

Jeżeli przyjmujemy nowe oznaczenia

$$y = \ln(I), \quad x = t, \quad a = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \quad b = \ln(I_0) \quad (16 \text{ a,b,c,d})$$

to widać, że dla tych zmiennych x i y zależność po zlogarytmowaniu jest liniowa:

$$y = ax + b \quad (17)$$

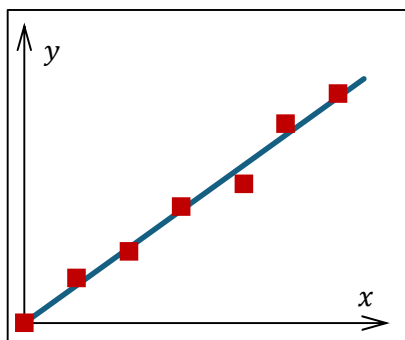
a jej współczynnik kierunkowy a , równy odwrotności czasu relaksacji obwodu τ , nazywany jest częstotliwością relaksacji.



Metody obliczeniowe

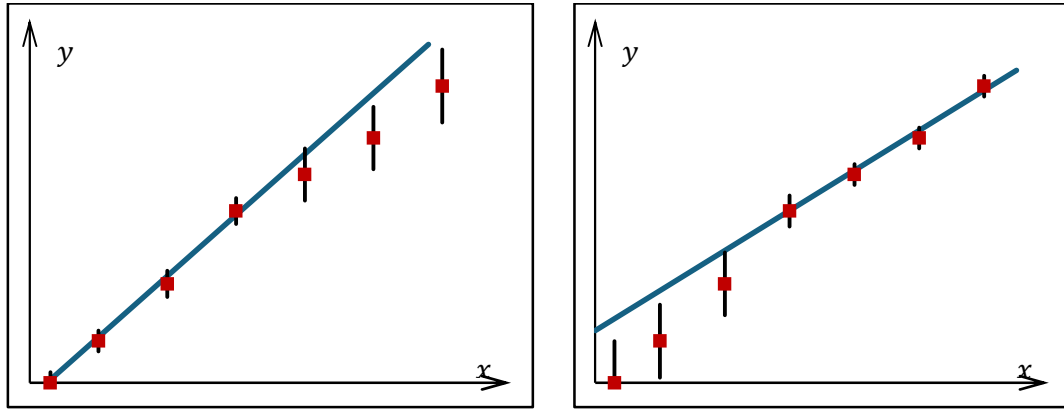
Ważona metoda najmniejszych kwadratów

Jak widać z zależności (16) i (17), logarytm z prądu rozładowania kondensatora $y = \ln(I)$ liniowo zależy od czasu t . Dlatego jeżeli dokonamy N pomiarów prądu rozładowania, otrzymując N wartości I_i , ($i = 0, \dots, n$; $N = n + 1$) oraz odpowiadających im N pomiarów czasu t_i , a następnie dokonamy transformacji zmiennej, $y_i = \ln(I_i)$, otrzymując N wartości y_i , to wydawać by się mogło, że punkty pomiarowe (t_i, y_i)



ułożą się wzdłuż linii prostej. Tak jednak nie jest, ponieważ błędy pomiarowe sprawią, że punkty będą usytuowane jak na rysunku. Istnieje jednak metoda, za pomocą której można przybliżyć oryginalny przebieg danej zależności (a dokładniej estymować, czyli odtworzyć statystycznie). Nosi ona nazwę metoda najmniejszych kwadratów – MNK. Podstawowa MNK zakłada, że niepewności $u(y)$ dla wszystkich punktów pomiarowych są sobie równe. Jeżeli jednak te niepewności nie są równe, należy użyć tzw.

ważonej metody najmniejszych kwadratów. Efekt jej działania, w porównaniu ze zwykłą metodą, jest przedstawiony na Rys. 6. Widać, że w każdym z dwu przypadków prosta jest dobrze dopasowana do tych punktów, które charakteryzują się małymi niepewnościami $u(y)$. Niepewności te zaznacza się na rysunku dla każdego punktu jako pionowe linie o wysokości $2u(y)$.



Rys. 6. Dopasowanie linii prostej do punktów. Punkty są takie same na obu rysunkach.

a. małe niepewności dla pierwszych czterech punktów

b. małe niepewności dla ostatnich czterech punktów

W przypadku, gdy oryginalną relacją do odtworzenia jest zależność liniowa, zadaniem MNK jest znalezienie współczynników a i b prostej $y = ax + b$ wraz z ich niepewnościami $u(a)$ i $u(b)$. Dla ważonej MNK wzory podano poniżej.

$$a = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (18a)$$

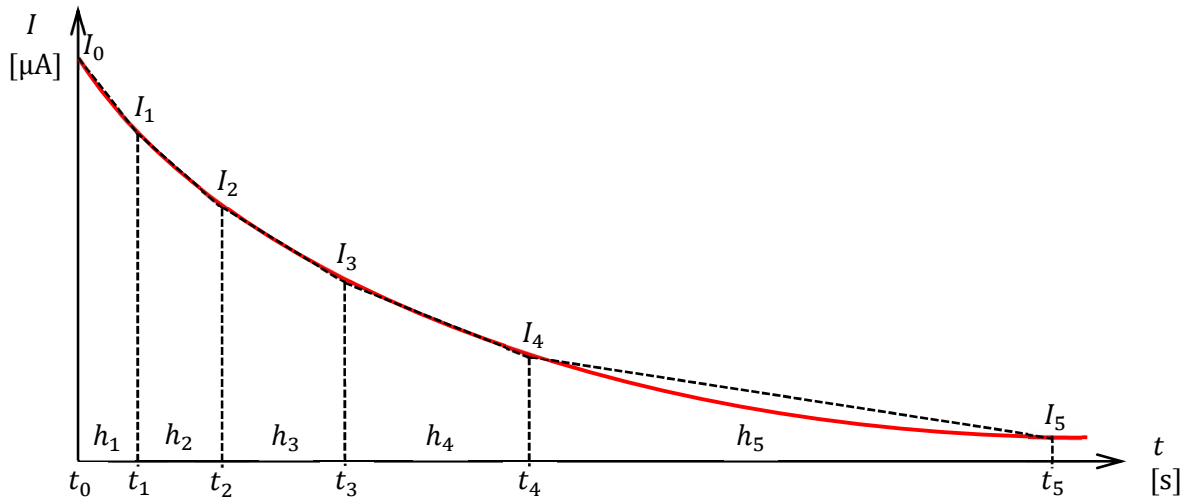
$$b = \frac{\sum w_i y_i - a \sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \text{lub} \quad b = \frac{\sum w_i y_i \sum w_i x_i^2 - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (18b)$$

$$u(a) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}} \quad u(b) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}} \quad (18c)$$

$$\text{gdzie} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum w_i (ax_i + b - y_i)^2}{N - 2}} \quad \text{lub} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum w_i y_i^2 - a \sum w_i x_i y_i - b \sum w_i y_i}{N - 2}} \quad (18d)$$

Metoda trapezów

Ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora można obliczyć z prądu rozładowania, co przedstawia wzór (7), czyli $Q = \int_0^t I dt$. Występująca we wzorze całka jest równa polu pod wykresem zależności prądu od czasu $I(t)$. Z kolei pole to można przybliżyć sumą pól trapezów, jak na Rys. 7. Widać, że im krótszy jest skok h , tutaj $h_i = t_i - t_{i-1}$, tym dokładniejsze jest przybliżenie pola pod wykresem polem trapezu.



Rys. 7. Metoda trapezów

Wykorzystując znany wzór na pole trapezu można obliczyć sumę pól wszystkich trapezów

$$P = \frac{1}{2}(I_0 + I_1)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)(t_2 - t_1) + \dots + \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_n)(t_n - t_{n-1}) \quad (19a)$$

czyli

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (I_{i-1} + I_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (19b)$$

Gdy skok jest stały, czyli $h = t_i - t_{i-1} = \text{const}$, to powyższy wzór upraszcza się do

$$P = \left(\frac{1}{2}I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1} + \frac{1}{2}I_n \right) h = \left(\frac{1}{2}I_0 + \sum_{i=1}^{n-1} I_i + \frac{1}{2}I_n \right) h \quad (20)$$

Błąd systematyczny metody trapezów

Błąd systematyczny tej metody, czyli różnica między polem obliczonym metodą trapezów a prawdziwym polem pod wykresem (Rys. 7), w przypadku stałego skoku h jest w przybliżeniu równy

$$\Delta P = \frac{h^2}{12} [f'(t_n) - f'(t_0)] \quad (21)$$

gdzie $f'(t)$ jest pochodną funkcji. W naszym przypadku funkcją tą jest zależność prądu od czasu $I(t)$.

Niestety skok pomiaru **czasu** $t_i - t_{i-1}$ w tym ćwiczeniu laboratoryjnym nie jest stały. Natomiast występują tylko dwie wartości skoku pomiaru **prądu** $I_i - I_{i-1}$. Pierwsza wartość skoku $h_1 = 10 \mu\text{A}$ występuje dla prądów zmieniających się od $I_0 = 150 \mu\text{A}$ do $I_{14} = 10 \mu\text{A}$, a druga wartość skoku $h_2 = 2 \mu\text{A}$ występuje od $I_{14} = 10 \mu\text{A}$ do $I_{18} = 2 \mu\text{A}$. Możemy skorzystać z tej względnej stałości skoku pomiaru prądu dlatego, że błąd metody trapezów jest taki sam, gdy ta metoda wykorzystuje trapezy „oparte” na osi x (tutaj t) jak i trapezy „oparte” na osi y (tutaj I). Wystarczy, żeby dane pomiarowe w obu przypadkach były takie same.

Ostatecznie błąd systematyczny metody trapezów w tym ćwiczeniu można obliczyć jako

$$\Delta P = \frac{h_1^2}{12} [t'(I_0) - t'(I_m)] + \frac{h_2^2}{12} [t'(I_m) - t'(I_n)] \quad (22)$$

gdzie $t'(I)$ jest pochodną zależności czasu od prądu, h_1 jest pierwszą wartością skoku pomiaru prądu ($h_1 = 10 \mu A$), h_2 jest drugą wartością skoku pomiaru prądu ($h_2 = 2 \mu A$), m jest numerem pomiaru przy którym następuje zmiana skoku ($m = 14$), n jest numerem ostatniego pomiaru ($n = 18$).

Pochodne występujące w powyższym wzorze należy obliczyć numerycznie, pamiętając, że $t_0 = 0$:

$$t'(I_0) = \frac{\frac{1}{2}t_2 - 2t_1 + \frac{3}{2}t_0}{h_1}, \quad t'(I_m) = \frac{\frac{1}{2}t_{m+2} - 2t_{m+1} + \frac{3}{2}t_m}{h_2}, \quad t'(I_n) = \frac{-\frac{1}{2}t_{n-2} + 2t_{n-1} - \frac{3}{2}t_n}{h_2} \quad (23)$$

Wartości wszystkich tych pochodnych są oczywiście ujemne dla prądu rozładowania kondensatora.

Niepewność metody trapezów

Ładunek zgromadzony na kondensatorze, obliczany w tym ćwiczeniu metodą trapezów jako pole pod wykresem prądu rozładowania kondensatora, według wzoru (19) otrzymuje się z pomiarów prądów I_i i odpowiadających im czasów t_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Naprawdę prąd I_i nie jest mierzony, ale jego wartość jest deklarowana (jako „równa” wartość, np. $I_1 = 140 \mu A$), a rzeczywisty prąd I_{rzi} w momencie wyłączenia stopera jest inny i niewiadomy, różni się od wartości deklarowanej o przypadkowy błąd δI_i i o stały dla wszystkich pomiarów błąd systematyczny δI_s . Mówimy, że I_{rzi} i δI_i są zmiennymi losowymi. Natomiast zmierzony przez stoper (w momencie jego wyłączenia) **czas t_i wynika z tego rzeczywistego prądu I_{rzi}** według krzywej rozładowania lub wzoru (12), **a nie z prądu deklarowanego I_i** . Czas ten dodatkowo jest obarczony przypadkowym błędem δt_i i błędem systematycznym δt_s . Zatem zmienne losowe I_{rzi} i t_i można zapisać jako

$$I_{rzi} = I_i + \delta I_i + \delta I_s, \quad t_i = t_{rzi} + \delta t_i + \delta t_s \quad (24)$$

Odchylenie standardowe prądu I_{rzi} , przy którym następuje wyłączenie stopera, zależy od szybkości zmian prądu w momencie wyłączenia, co można zapisać jako

$$u(\delta I_i) = \left| \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_i} u(t)$$

gdzie $u(\delta t_i) = u(t)$ jest niepewnością pomiaru czasu wynikającą z reakcji osoby mierzącej. Przekształcając tę zależność otrzymujemy

$$u(\delta I_i) = \left| -\frac{J_0}{\tau} e^{-\frac{t_i}{\tau}} \right| u(t) = \frac{I_i}{\tau} u(\delta t) \quad (25)$$

Obliczając ładunek kondensatora metodą trapezów jako pole pod wykresem $I(t)$, wstawiamy prądy deklarowane I_i i czasy zmierzone t_i z zależności (24) do wzoru (19b), co daje

$$Q = P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (I_{rzi-1} + I_{rzi} - \delta I_{i-1} - \delta I_i - 2\delta I_s)(t_{rzi} - t_{rzi-1} - \delta t_i + \delta t_{i-1}) \quad (26)$$

gdzie występują wyżej wymienione trzy zmienne losowe: δI_i , δI_s i δt_i (δt_s się redukuje). Chociaż błąd systematyczny δI_s danego miernika jest stały, to dla różnych mierników jest zmienną losową. Jego niepewność oblicza się z klasy miernika. Niepewność trzeciej zmiennej losowej jest stała: $u(\delta t_i) \equiv u(\delta t)$.

Można teraz zastosować metodę przenoszenia niepewności do obliczenia niepewności ładunku:

$$u(Q) = \sqrt{\sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta I_i} u(\delta I_i) \right]^2 + \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta I_s} u(\delta I_s) \right]^2 + \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta t_i} u(\delta t) \right]^2} \quad (27)$$

najpierw obliczywszy pochodne z zależności (26):

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta I_0} = -\frac{1}{2}(t_1 - t_0); \quad \frac{\partial Q}{\partial \delta I_i} = -\frac{1}{2}(t_{i+1} - t_{i-1}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \frac{\partial Q}{\partial \delta I_n} = -\frac{1}{2}(t_n - t_{n-1})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta I_s} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(t_i - t_{i-1}) = -(t_n - t_0)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta t_0} = \frac{1}{2}(I_0 + I_1); \quad \frac{\partial Q}{\partial \delta t_i} = \frac{1}{2}(I_{i-1} - I_{i+1}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \frac{\partial Q}{\partial \delta t_n} = \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_n)$$

gdzie dla wygody zastąpiono niewiadome prądy I_{rzi} i czasy t_{rzi} bliskimi im, zmierzonymi I_i i t_i .

Wstawiając do wzoru (27) powyższe pochodne oraz niepewności $u(\delta I_i)$ dane wzorem (25), oprócz $u(\delta I_0) = 0$ (bo przy pomiarze prądu I_0 nie ma zmian prądu), $u(\delta t_i) = u(t_i) = u(t) = \text{const}$, oprócz $u(\delta t_0) = u(t_0) = 0$ (bo czas $t_0 = 0$ przyjmowany jest arbitralnie, a nie mierzony), otrzymujemy niepewność ładunku obliczonego metodą trapezów:

$$u(Q) = \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n-1} I_i^2 (t_{i+1} - t_{i-1})^2 + \frac{I_n^2 (t_n - t_{n-1})^2}{\tau^2} + \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i-1} - I_{i+1})^2 + (I_{n-1} + I_n)^2 \right] u^2(t) + 4(t_n - t_0)^2 u^2(I_s)}$$

W obliczeniach w tym ćwiczeniu potrzebna jest niepewność pomiaru prądu rozładowania kondensatora. Zbierając wzory (24) i (25), ta niepewność da się wyrazić jako

$$u(I_i) = \sqrt{u^2(\delta I_i) + u^2(\delta I_s)} = \sqrt{\left(\frac{I_i}{\tau}\right)^2 u^2(t) + u^2(I_{od}) + u^2(I_s)} \quad \text{dla } i \neq 0 \quad (29)$$

gdzie $u(t)$ jest niepewnością wynikającą z czasu reakcji osoby dokonującej pomiaru, niepewność odczytu $u(I_{od})$ wynika z działki elementarnej ΔI , a $u(I_s)$ z klasy miernika (wyrażonej w procentach):

$$u(I_{od}) = \frac{\Delta I}{2\sqrt{3}}, \quad u(I_s) = \text{klasa} \cdot \text{zakres_pomiarowy} \quad (30)$$

Wzór (29) nie obowiązuje dla prądu początkowego (patrz uwaga powyżej wzoru (28)), dla którego:

$$u(I_0) = \sqrt{u^2(I_{od}) + u^2(I_s)} \quad (31)$$

Poprawka na ładunek ze względu na skończony czas pomiarów

Realne pomiary prądu rozładowania kondensatora są przeprowadzane w skończonym czasie, w którym natężenie prądu nie spada do zera (Rys. 7). Ma to wpływ na dokładność wyznaczenia ładunku zgromadzonego w kondensatorze, który to ładunek obliczamy jako pole pod wykresem $I(t)$. Pozostałą część ładunku można obliczyć za pomocą całki:

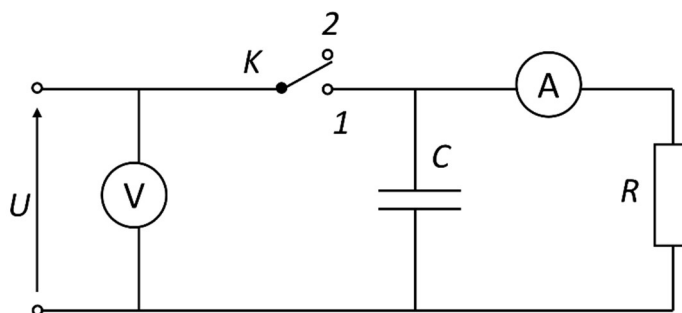
$$\Delta Q = \int_{t_n}^{\infty} I(t) dt = \int_{t_n}^{\infty} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau I_0 e^{-\frac{t_n}{\tau}} \quad (32)$$

Obliczoną poprawkę ΔQ należy dodać do wyznaczonego wcześniej za pomocą metody trapezów ładunku Q . Wartość ΔQ jest przybliżona, ponieważ użyta stała czasowa τ została wcześniej obliczona z mniej dokładnej wartości ładunku Q ($\tau = RC = RQ/U$), obliczonego bez uwzględnienia tej poprawki. Dlatego proponuje się użycie metody kolejnych przybliżeń. Na początek należy postąpić jak wyżej, czyli do wyznaczonego wcześniej za pomocą metody trapezów ładunku, oznaczmy go teraz Q_0 , należy dodać pierwszą poprawkę $\Delta Q'$, obliczoną jak wyżej, otrzymując $Q' = Q_0 + \Delta Q'$. Następnie za pomocą Q' należy obliczyć $\tau' = RQ'/U$ oraz drugą poprawkę $\Delta Q''$ jak wyżej, czyli ze wzoru (32), Tę poprawkę należy dodać do pierwotnie obliczonego Q_0 , czyli $Q'' = Q_0 + \Delta Q''$ (a nie $Q'' = Q' + \Delta Q''$). Uwzględniając dokładność osiąganą na pracowni studenckiej, uwzględnienie drugiej poprawki wystarcza. Różnica $\Delta Q'' - \Delta Q'$ będzie wtedy miarą dokładności metody.



Metodologia wykonania ćwiczenia

1. Połączyć obwód według schematu: w zależności od położenia klucza K obwód służy do ładowania lub rozładowania kondensatora.



2. Naładować kondensator (przełącznik K w pozycji 1). Ustawić taką wartość oporu R , aby natężenie prądu $I = I_0$ (dla $t = 0$ s) osiągnęło maksymalną, możliwą do odczytu wartość przy pomocy zastosowanego amperomierza. Zanotować wartość oporu R i klasę opornika.
3. Ustawić przełącznik K w pozycji 2 i jednocześnie włączyć sekundomierz. Zmierzyć czas t_1 , po którym natężenie prądu osiągnie wartość $I_1 = I_0 - \Delta I_1$. Wartość ΔI_1 ustalić z prowadzącym ćwiczenia (typowa wartość $\Delta I_1 = 10 \mu\text{A}$).
4. Podobnie zmierzyć czasy $t_2, \dots, t_m$, po których natężenie prądu osiągnie wartości $I_2 = I_0 - 2\Delta I_1$, $I_3 = I_0 - 3\Delta I_1, \dots, I_m = I_0 - m\Delta I_1$. Po dojściu do prądu I_m (typowa wartość $I_m = 10 \mu\text{A}$) zmienić krok ΔI_1 na ΔI_2 (typowa wartość $\Delta I_2 = 2 \mu\text{A}$). Czasu dla $I = 0$ nie mierzyć.
5. Zanotować klasę amperomierza, jego zakres pomiarowy i działkę elementarną.



Tabela pomiarowa

U [V]	R [Ω]	I_0 [μA]	I [μA]	t [s]	$Q \pm u(Q)$ [C]	$C \pm u(C)$ [F]	$\tau \pm u(\tau)$ [s]
...	...	150	140				met. 1
			130				...
			120				
							
			...				met. 2
			30		...	...	...
			20				
			10				
			8				met. 3
			6				...
			4				
			2				



Obliczenia

1. Sporządzić wykresy zależności prądu rozładowania kondensatora od czasu $I = f(t)$ oraz $\ln I = f(t)$. W celu sporządzenia tego drugiego wykresu obliczyć $y_i = \ln I_i$ dla $i = 0, 1 \dots n$.
2. Wartość ładunku Q zgromadzonego na okładkach kondensatora obliczyć wyznaczając wartość pola powierzchni zawartego między osią OX a krzywą $I = f(t)$. Do wyznaczenia pola powierzchni wykorzystać metodę trapezów według wzoru (19). Jeśli długości boków trapezów wyrazimy nie w centymetrach, a bezpośrednio w μA i s , to wyliczone pole powierzchni będzie wyrażone w mikro kulombach: $\mu A \cdot s = \mu C$.
3. Wyznaczyć pojemność kondensatora z zależności (1) i (12), co daje $C = \frac{Q}{RI_0}$
4. Obliczyć stałą czasową obwodu:
 - a. na podstawie wykresu $I(t)$ korzystając z definicji stałej czasowej, wzór (15) (τ jest czasem, po którym prąd rozładowania maleje e -krotnie),
 - b. z zależności $\tau = RC$, wzór (14),

- c. z zależności $\ln I = f(t)$ poprzez wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej, wzory (16), (17) i opis pod nimi. W tym celu najpierw do punktów pomiarowych $\ln(I_i) = f(t_i)$ dopasować prostą, korzystając z metody najmniejszych kwadratów.
- Uwzględnić fakt, że zgodnie z wzorem teoretycznym $I = 0$ dopiero, gdy $t \rightarrow \infty$. Realne pomiary są przeprowadzane w skończonym czasie, w którym natężenie prądu nie spada do zera, co ma wpływ na dokładność wyznaczenia ładunku. Dlatego uwzględnić poprawkę daną wzorem (32).
 - Na wykresie $I = f(t)$ zaznaczyć niepewności pomiarowe. Niepewności pomiaru natężenia $u(I_i)$ dla każdego prądu obliczyć ze wzorów (29), (30) i osobno dla $u(I_0)$ ze wzoru (31), na podstawie klasy przyrządu pomiarowego, niepewności odczytu związanej z działką elementarną i niepewności wynikającej z szybkości zmian prądu podczas odczytu dla czasu reakcji człowieka $u(t) = 0.2$ s.
 - Niepewność $u(R)$ obliczyć na podstawie klasy opornika dekadowego: $u(R) = \text{klasa} \cdot R$.
 - Niepewność $u(Q)$ wyznaczyć metodą przenoszenia niepewności ze wzorów (28) i (30).
 - Niepewność wyznaczenia pojemności kondensatora obliczyć metodą przenoszenia niepewności. Ponieważ pojemność została obliczona z ładunku Q , oporu R i prądu początkowego I_0 (punkt 3), to:

$$u(C) = \sqrt{\left[\frac{\partial C}{\partial Q} u(Q)\right]^2 + \left[\frac{\partial C}{\partial R} u(R)\right]^2 + \left[\frac{\partial C}{\partial I_0} u(I_0)\right]^2}$$

$u(I_0)$ obliczyć ze wzoru (31). Wyznaczyć i podać jawne wyrażenia na pochodne.

- Niepewności stałej czasowej wyznaczyć dla każdej metody użytej do jej obliczenia (3 metody):
 - na podstawie dokładności odczytu odpowiednich wartości z wykresu $I = f(t)$;
 - metodą przenoszenia niepewności; jednak, żeby uniknąć zmiennych skorelowanych, to po uwzględnieniu tego, że $\tau = RC$, a $C = Q/(RI_0)$, potrzebne pochodne należy obliczać na podstawie zależności $\tau = Q/I_0$:

$$u(\tau) = \sqrt{\left[\frac{\partial \tau}{\partial Q} u(Q)\right]^2 + \left[\frac{\partial \tau}{\partial I_0} u(I_0)\right]^2}$$

- na podstawie metody najmniejszych kwadratów i wyznaczonej z niej niepewności parametru prostej $u(a)$ wyznaczyć niepewność $u(\tau)$ metodą przenoszenia niepewności, pochodną obliczając ze wzoru (16c):

$$u(\tau) = \left| \frac{\partial \tau}{\partial a} \right| u(a)$$

- We wnioskach poprawnie zapisać obliczone wartości razem z ich niepewnościami: ładunku Q zgromadzonego w kondensatorze, pojemności kondensatora C i stałej czasowej τ wyznaczonej trzema metodami. Poprawnie porównać trzy otrzymane wartości stałej czasowej za pomocą ich niepewności (porównanie za pomocą metody podanej w skrypcie Niepewności pomiarowe). Stwierdzić, która z tych trzech metod jest najdokładniejsza. Stwierdzić, który składnik niedokładności wyznaczenia ładunku Q : błąd systematyczny, niepewność, poprawka dla $t \rightarrow \infty$, jest największy.

Obliczenia nadobowiązkowe

- Korekcja punktu 2 obliczeń: Uwzględnić błąd systematyczny metody trapezów, wzory (22) i (23), odejmując jego wartość od wartości ładunku wyznaczonego w punkcie 2 obliczeń.
- Korekcja punktu 4c obliczeń: Zamiast zwykłej metody najmniejszych kwadratów zastosować ważoną jej odmianę, wzory (18), gdzie $y_i = \ln(I_i)$, x_i jest czasem pomiaru t_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Potrzebne niepewności $u(y_i)$ obliczyć metodą przenoszenia niepewności

$$u(y_i) = \left| \frac{\partial y_i}{\partial I_i} \right| u(I_i) = \frac{u(I_i)}{I_i}$$

Niepewności $u(I_i)$ zostały już obliczone w punkcie 6. Są one różne dla różnych pomiarów (o numerach i), a obliczone z nich za pomocą powyższego wzoru niepewności $u(y_i)$ są tym bardziej różne. Właśnie znaczna zmienność niepewności punktów pomiarowych jest uzasadnieniem użycia ważonej metody najmniejszych kwadratów.

Niepewności $u(y_i)$ można zaznaczyć na wykresie $y \equiv \ln I = f(t)$ w celu zobrazowania, jak bardzo się różnią.