

Badanie ruchu obrotowego przy pomocy żyroskopu

1. Wymagania do ćwiczenia

1. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej.
2. Zasada działania i budowa żyroskopu.
3. Zjawisko precesji i nutacji.

Literatura:

1. David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Podstawy Fizyki Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2015.
2. Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1, OpenStax 2017,
3. K. Krop, K. Chłędowska, Fizyka I Pracownia, Wydanie II, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2017.

2. Wprowadzenie do ćwiczenia

Dla dysku żyroskopu wprowadzonego w ruch obrotowy przez spadającą masę m (Rys. 1), prawdziwa jest następująca relacja dla przyspieszenia kąowego:

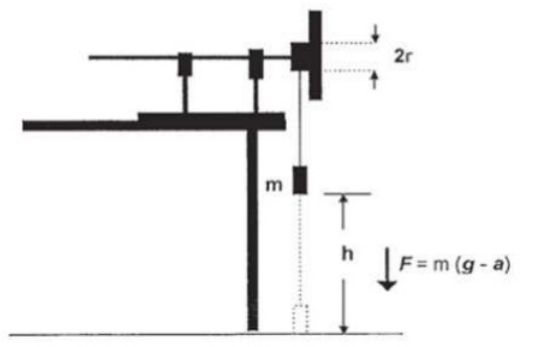
$$\frac{d\omega_R}{dt} = \alpha = \frac{M}{I_P} \quad (1)$$

gdzie ω_R - prędkość kątowa, α - przyspieszenie kątowe, I_P - moment bezwładności, $M = F \cdot r$ - moment siły. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siła, która wywołuje moment siły dana jest wzorem:

$$F = m \cdot (g - a) \quad (2)$$

gdzie g - przyspieszenie ziemskie, a - przyspieszenie masy m . Przyspieszenie a oraz przyspieszenie kątowe α możemy wyrazić za pomocą następujących wzorów:

$$a = \frac{2h}{t_F^2}; \quad \alpha = \frac{a}{r} \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat ustawienia aparatury pomiarowej do wyznaczenia momentu bezwładności dysku żyroskopu.

gdzie h - wysokość z jakiej spuszcza się masę m , t_F - czas spadku masy m , r - promień szpuli, na którą nawinięta jest nić. Podstawiając wzory (2) i (3) do wzoru (1) otrzymujemy zależność:

$$t_F^2 = \frac{2I_p + 2mr^2}{mgr^2} \cdot h \quad (4)$$

Jest to wzór na liniową zależność $t_F^2 = f(h)$. Dopasowując prostą do punktów pomiarowych oraz wyznaczając jej współczynnik kierunkowy możemy wyznaczyć moment bezwładności dysku I_p . W ogólności moment bezwładności dysku wyznaczony z jego geometrii (I_{Pg}) wyraża się następującym wzorem:

$$I_p = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{\pi}{2}R^4d\rho \quad (5)$$

gdzie R - promień dysku, d - grubość dysku, ρ - gęstość plastiku, z którego wykonany jest dysk ($\rho=0,9 \text{ g/cm}^3$).

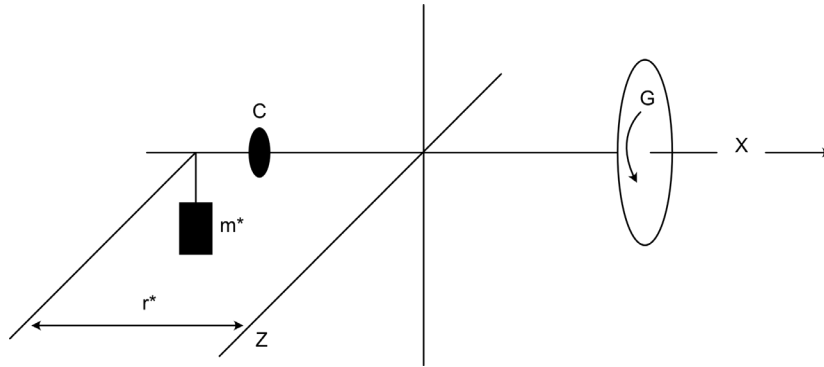
3. Częstość precesji

Żyroskop G (Rys. 2) zawieszony jest tak, aby mógł się obracać wokół jego 3 głównych osi, oraz aby był w równowadze w poziomie z przeciwwagą C. Jeśli wprawimy żyroskop w ruch obrotowy wokół osi x z prędkością kątową ω , możemy zapisać następujące wyrażenie na moment pędu L , który jest stały w czasie i przestrzeni:

$$L = I_p \cdot \omega_R \quad (6)$$

Zawieszamy masę m^* w odległości r^* od punktu podparcia (Rys. 2). Doczepiona masa wywołuje dodatkowy moment siły M^* , który jest równy zmianie momentu pędu w czasie:

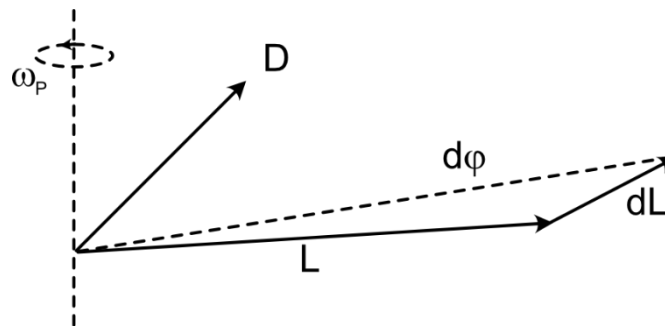
$$M^* = m^*gr^* = \frac{dL}{dt} \quad (7)$$



Rys. 2. Schematyczny rysunek żyroskopu poddanego siłom.

Pod wpływem dodatkowego momentu siły w układzie, który w naszym przypadku jest prostopadły do momentu pędu L , po czasie dt wektor L obróci się o kąt $d\varphi$ z jego początkowej pozycji (Rys. 3):

$$L = Ld\varphi \quad (8)$$



Rys. 3. Precesja poziomej osi żyroskopu.

Żyroskop nie przewraca się pod wpływem dodatkowego momentu siły, a reaguje prostopadle do siły, która go wywołała. Oś x wokół, której obraca się dysk żyroskopu również zaczyna się obracać wokół osi pionowej. Ruch ten nazywamy precesją. Prędkość kątową precesji ω_P możemy wyrazić następującym wzorem:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{I_P \omega_R dt} = \frac{m^* gr^*}{I_P \omega_R} \quad (9)$$

Podstawiając $\omega_P = 2\pi/t_P$ oraz $\omega_R = 2\pi/t_R$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{t_R} = \frac{m^* gr^*}{4\pi^2} \frac{1}{I_P} \cdot t_P \quad (10)$$

Podwojenie momentu siły (podwojenie masy m^*) spowoduje podwojenie częstotliwości precesji. Jeśli zawiesimy masę m^* z przodu osi żyroskopu, lub jeśli kierunek obrotu dysku zostanie zmieniony na przeciwny, kierunek precesji również zmieni się na przeciwny. Jeśli użyjemy dodatkowego dysku takiego samego jak dysk żyroskopu i wprawimy oba dyski w ruch obrotowy w przeciwnych kierunkach, precesja się nie pojawi pod wpływem dodatkowego momentu siły.

Zjawisku precesji często towarzyszy również nutacja, czyli koniec osi żyroskopu wykonuje dodatkowy ruch okresowy po cykloidzie. Objawia się to niewielkimi wahaniami w górę i w dół osi

żyroskopu podczas jego precesji. Zależność częstości nutacji i częstości obrotowej możemy zapisać jako:

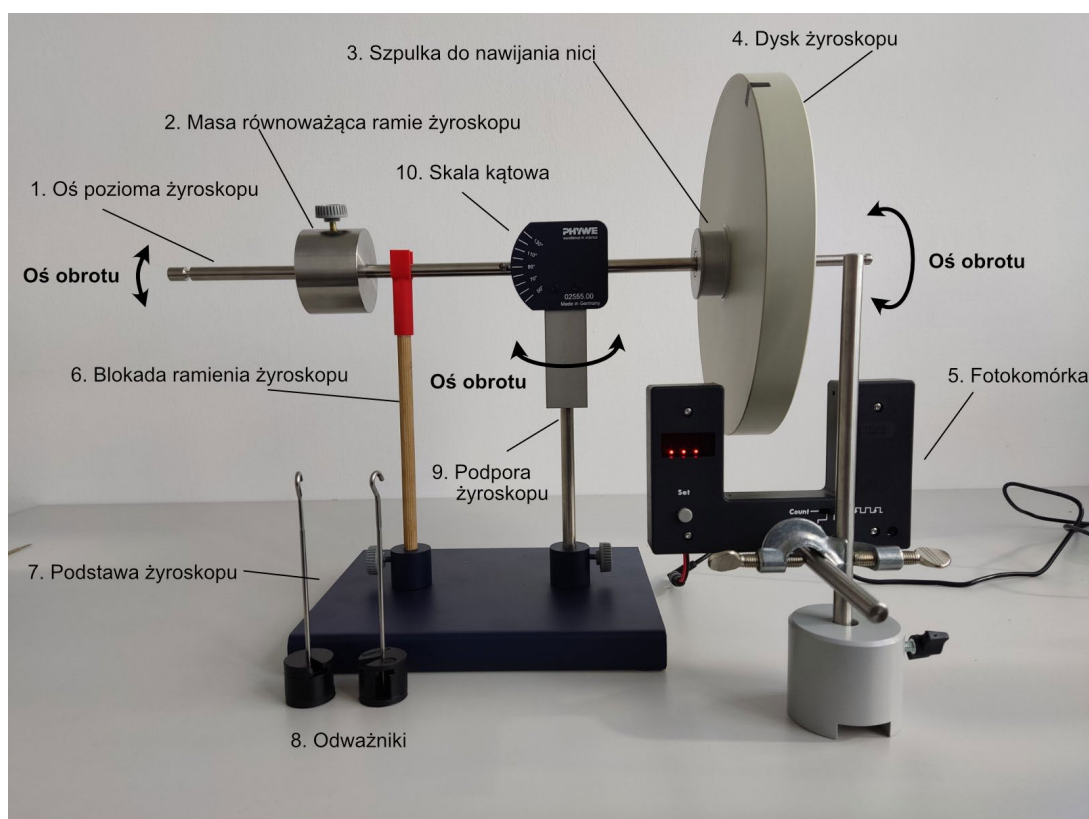
$$\omega_N = k\omega_R; \quad t_R = kt_N \quad (11)$$

gdzie k jest stałą zależną od momentu bezwładności względem głównych osi obrotu.

4. Metodologia wykonania pomiarów

Zestaw żyroskopu 3-osiowego przedstawiono na Rys. 4 składa się on z: osi poziomej żyroskopu (1), masy równoważącej ramię żyroskopu (2), szpulki do nawijania nici (3), dysku żyroskopu (4), fotokomórki (5), blokady ramienia żyroskopu (6), podstawy żyroskopu (7), odważników (8).

1. Zrównoważyć ramię żyroskopu (1) za pomocą masy (2).
2. Zmierzyć grubość i średnicę dysku żyroskopu (4) oraz średnicę szpulki (3).
3. Ustawić żyroskop tak aby nić przywiązana do szpulki żyroskopu (3) wystawała poza krawędź stołu (Rys. 1).



Rys. 4. Żyroskop 3-osiowy.

4. Do pętli na drugim końcu nici przyczepić masę $m = 60g$ (talerz z 5 obciążnikami szczerelinowymi (8)).
5. Zmierzyć czas opadania t_F masy m z wysokości h wskazanych przez prowadzącego, w tym celu nawinąć nić na szpulę żyroskopu (3) utrzymując jego oś w poziomie na wymaganej wysokości h . Oś żyroskopu (1) można oprzeć na blokadzie ramienia (6).
6. Żyroskop ustawić tak aby miał swobodę ruchu wokół jego 3 osi. (Usunąć blokadę ramienia (6) jeśli była używana).

7. Wprawić dysk żyroskopu w ruch obrotowy, w tym celu na jego szpulę (3) nawinąć i mocno pociągnąć trzymając jednocześnie jego oś obrotu (1) w poziomie.
8. Zmierzyć czas jednego pełnego obrotu dysku żyroskopu (4) t_{R1} za pomocą fotokomórki (5).
9. Następnie usunąć fotokomórkę (5) i zawiesić masę $m^* = 30g$ w odległości $r^* = 27\text{ cm}$ od punktu podparcia żyroskopu aby wywołać jego precesję.
10. Zmierzyć stoperem czas połowy precesji $t_P/2$.
11. Zdjąć ciężarek m_1 aby oś żyroskopu odzyskała bezruch i ponownie używając fotokomórki (5) wyznaczyć czas obrotu dysku żyroskopu (4) t_{R2} .
12. Powtórzyć 10 razy punkty (8–11) dla ciągle malejącej liczby obrotów dysku żyroskopu.
13. Wprawić żyroskop w ruch nutacyjny, w tym celu lekko pchnąć oś obracającego się żyroskopu.
14. Stoperem zmierzyć czas jednej nutacji t_N , natomiast czas obrotu dysku t_R zmierzyć fotokomórką.
15. Pomiary powtórzyć dla malejącej liczby obrotów dysku żyroskopu jak w punktach 8–11.

Tabela pomiarowa

t_F	h	t_{R1}	t_{R2}	t_{Rsr}	$t_P/2$	t'_{R1}	t'_{R2}	t'_{Rsr}	t_N
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]

5. Obliczenia

1. Wyznaczyć moment bezwładności dysku żyroskopu, w tym celu sporządzić wykres zależności $t_F^2(h)$.
2. Do danych pomiarowych dopasować metodą najmniejszych kwadratów linię prostą. Na podstawie współczynnika nachylenia dopasowanej prostej i wzoru: $t_F^2 = \frac{2I_p + 2mr^2}{mgr^2} \cdot h$ wyznaczyć moment bezwładności dysku żyroskopu.
3. Wyznaczyć niepewność $u(I_p)$ z prawa przenoszenia niepewności.
4. Porównać otrzymany wynik z wartością geometryczną momentu bezwładności (I_{Pg}).
5. Sporządzić wykres odwrotności wartości czasu obrotu t_{Rsr} obliczonej jako średnia arytmetyczna obu pomiarów (t_{R1} i t_{R2}) od czasu precesji t_P .
6. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów dopasować prostą i na podstawie jej współczynnika kierunkowego oraz wzoru $\frac{1}{t_R} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2 I_p} \cdot t_P$ wyznaczyć moment bezwładności żyroskopu.
7. Wyznaczyć niepewność $u(I_p)$ z prawa przenoszenia niepewności.
8. Wyznaczyć częstość precesji $\omega_P = \frac{m^*gr^*}{I_p\omega_R}$.
9. Wyznaczyć niepewność $u(\omega_P)$ z prawa przenoszenia niepewności.
10. Porównać otrzymany wynik z wartością geometryczną momentu bezwładności (I_{Pg}).

11. Sporządzić wykres $t_R(t_N)$.
12. Dopasować metodą najmniejszych kwadratów prostą.
13. Korzystając z wzorów: $t_R = kt_N$ i $\omega_N = k\omega_R$ wyznaczyć częstość nutacji ω_N a jej niepewność wyznaczyć z prawa przenoszenia niepewności.