Wahadło balistyczne.
Wyznaczanie prędkości pocisku i sprawdzanie zasad zachowania energii i momentu pędu.

1. Wymagania do ćwiczenia

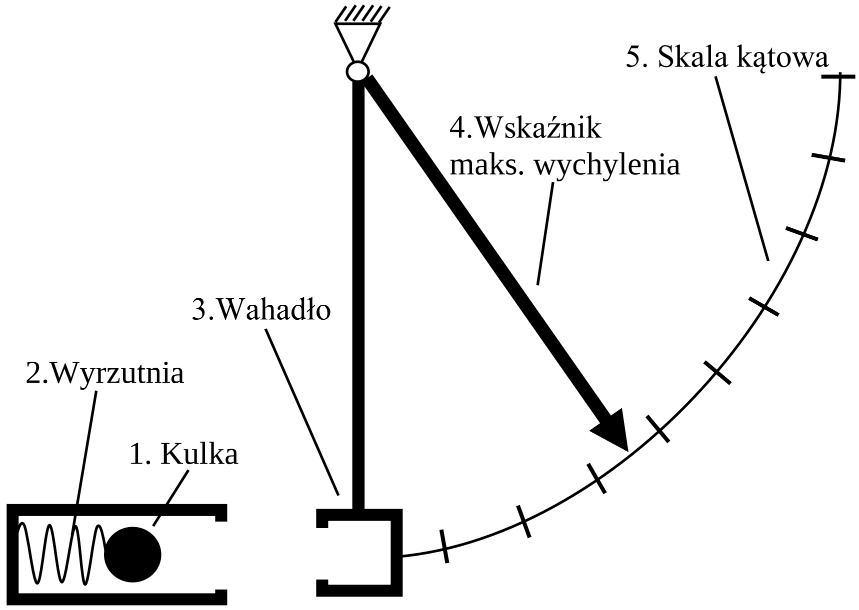
1. Dynamika ruchu obrotowego.
2. Drgania harmoniczne, wahadło fizyczne.

<u>Literatura:</u>

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker – Podstawy fizyki, t.1, PWN, Warszawa 2003
   Rozdz. 11.1÷11.5 i 11.7÷11.9 Obroty; str. 260÷280
   Rozdz. 12.8÷12.10 Moment pędu; str. 310÷317
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker – Podstawy fizyki, t.2, PWN, Warszawa 2003
   Rozdz. 16.1, 16.2, 16.3 Drgania; str. 94÷100

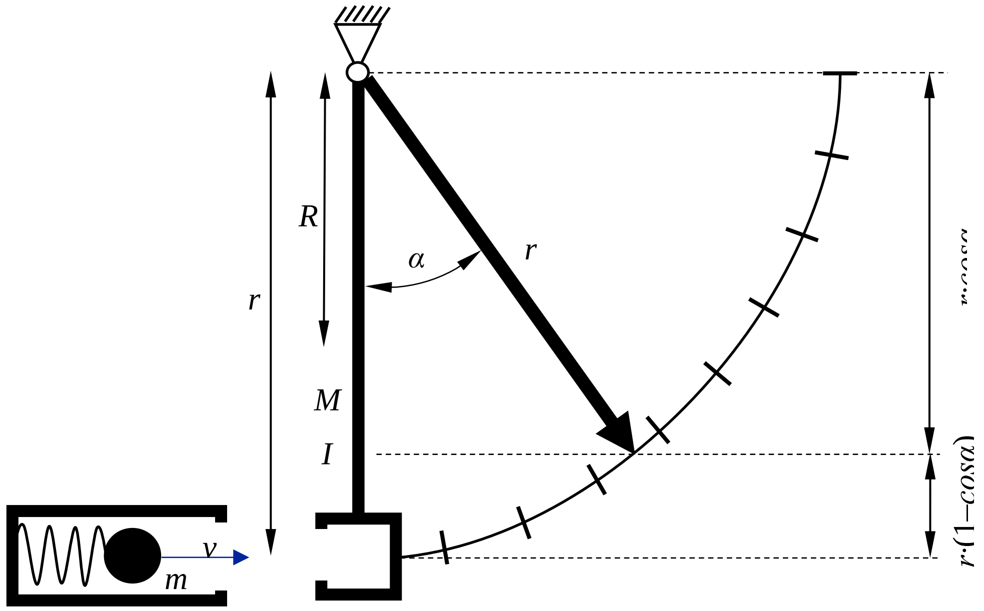
2. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia

Wahadło balistyczne jest urządzeniem służącym do wyznaczania prędkości lotu pocisku. Znane jest ono w wielu odmianach. Jedno z takich wahadeł, którego schemat przedstawiony jest na rys. 1, użyto w tym ćwiczeniu. Pocisk jest metalową kulką 1 wprawianą w ruch przez wyrzutnię 2. Pocisk uderza we wnękę wahadła 3, w której zostaje uwięziony (zderzenie doskonale niesprężyste), lub w od której się odbija (zderzenie sprężyste). Na skutek tego uderzenia wahadło zaczyna poruszać się ruchem obrotowym i przy tym popychać lekki wskaźnik 4, który pokazuje maksymalne wychylenie na skali kątowej 5.



Rys. 1. Wahadło balistyczne – schemat

Charakterystyczne wielkości przedstawiono na rys. 2, gdzie:
m – masa pocisku,
v – prędkość pocisku przed uderzeniem,
r – odległość toru pocisku od osi obrotu wahadła,
M – masa wahadła,
I – moment bezwładności wahadła,
R – odległość środka masy wahadła od jego osi obrotu,
α – kąt maksymalnego wychylenia wahadła.



Rys. 2. Wahadło balistyczne – charakterystyczne wielkości

2.1. Zderzenie doskonale niesprężyste

Dla doskonale niesprężystego zderzenia, podczas którego pocisk zostaje unieruchomiony we wnęce wahadła, można zastosować zasadę zachowania momentu pędu. Moment pędu L_I układu przed zderzeniem jest momentem pocisku. Można go obliczyć jak dla ciała punktowego, ponieważ przed zderzeniem pocisk się nie obraca

$$L_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{I}} r = mvr \tag{1}$$

gdzie p_{I} jest pędem pocisku przed zderzeniem, m masą pocisku, v prędkością pocisku przed uderzeniem, a r odległością toru pocisku od osi obrotu wahadła.

Moment pędu L_{II} po zderzeniu liczymy jak dla ciała sztywnego, które stanowi obracające się wahadło razem z pociskiem

$$L_{\mathrm{II}} = I_{\mathrm{II}}\omega = (I + mr^2)\omega \tag{2}$$

gdzie I_{II} jest momentem bezwładności układu wahadło-pocisk będącym sumą momentu bezwładności samego wahadła I i momentu bezwładności pocisku mr^2, natomiast ω jest prędkością kątową układu tuż po zderzeniu.

Stosując zasadę zachowania momentu pędu, czyli $L_{\mathrm{I}} = L_{\mathrm{II}}$, po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymujemy

$$mvr = (I + mr^2)\omega \tag{3}$$

Do opisu ruchu obrotowego wahadła (razem z pociskiem) po zderzeniu aż do zatrzymania się można użyć zasady zachowania energii, z uwzględnieniem tego, że straty energii związane z oporem powietrza i siłą tarcia w łożysku wahadła są znikome. Energia układu E_{II} tuż po zderzeniu jest energią kinetyczną ruchu obrotowego

$$E_{\mathrm{II}} = \frac{I_{\mathrm{II}}\omega^2}{2} = \frac{(I+mr^2)\omega^2}{2} \tag{4}$$

Energia układu E_{III} w momencie zatrzymania się i osiągnięcia skrajnego położenia jest energią potencjalną. Jednak najwygodniej jest obliczyć ją osobno dla wahadła i osobno dla pocisku, ponieważ wahadło i pocisk mają swoje środki ciężkości w różnych punktach. Z rys. 2 widać, że środek ciężkości pocisku podnosi się na wysokość $h = r(1–\cos\alpha)$, gdzie r jest odległością pocisku od osi obrotu. Analogicznie środek ciężkości wahadła podnosi się na wysokość $H = R(1–\cos\alpha)$, gdzie R jest odległością środka ciężkości wahadła od osi obrotu. Dlatego energia potencjalna E_{III} jest równa

$$E_{\mathrm{III}} = mgh + MgH = mgr(1 - cos\alpha_1) + MgR(1 - cos\alpha_1) \tag{5}$$

gdzie m i M są masami pocisku i wahadła a α_1 jest maksymalnym kątem odchylenia wahadła w zderzeniu doskonale niesprężystym.

Stosując zasadę zachowania energii (6a), po uwzględnieniu zależności (4 i 5) otrzymujemy równanie (6b)

$$E_{\mathrm{II}} = E_{\mathrm{III}} \tag{6a}$$

$$\frac{(I+mr^2)\omega^2}{2} = \left(mgr + MgR\right)\left(1 - cos\alpha_1\right) \tag{6b}$$

Wyznaczając z powyższego równania prędkość kątową po zderzeniu

$$\omega = \sqrt{\frac{2(mgr+MgR)(1-cos\alpha_1)}{I+mr^2}} \tag{7}$$

i podstawiając do równania (3) dostajemy równanie

$$mvr = (I + mr^2)\sqrt{\frac{2(mgr+MgR)(1-cos\alpha_1)}{I+mr^2}} \tag{8}$$

z którego można obliczyć nieznaną prędkość pocisku

$$v = \frac{\sqrt{2(I+mr^2)(mgr+MgR)(1-cos\alpha_1)}}{mr} \qquad (9)$$

Można także zastanowić się, jaka część początkowej energii została uniesiona przez wahadło z pociskiem w formie energii mechanicznej, a jaka część została zamieniona na energię cieplną. Energia początkowa E_{I} jest energią kinetyczną pocisku

$$E_{\mathrm{I}} = \frac{mv^2}{2} \qquad (10)$$

a energia mechaniczna po zderzeniu E_{II} na podstawie zasady zachowania energii (6a) jest równa energii końcowej E_{III} danej wzorem (5). Dlatego stosunek energii mechanicznych przed i po zderzeniu, który można nazwać sprawnością zderzenia, jest równy

$$\eta_1 = \frac{E_{\mathrm{II}}}{E_{\mathrm{I}}} = \frac{E_{\mathrm{III}}}{E_{\mathrm{I}}} = \frac{(mgr+MgR)(1-cos\alpha_1)}{\frac{1}{2}mv^2} \qquad (11)$$

2.2. *Zderzenie sprężyste*

Jeżeli pozwolimy, żeby pocisk odbił się od wahadła (jak to zrobić, opisane jest w części wykonawczej instrukcji) i poruszał się po zderzeniu z prędkością inną niż dolny koniec wahadła, to zasada zachowania momentu pędu obejmująca chwile tuż przed i tuż po zderzeniu będzie miała postać podobną do tej w równaniu (3):

$$L_{\mathrm{I}} = L_{\mathrm{II}} \quad \text{czyli} \quad mvr = I\omega + mru \qquad (12)$$

ale uwzględniającą to że pocisk po zderzeniu porusza się z prędkością u, która teraz jest nieznana. Natomiast prędkość pocisku v przed zderzeniem jest znana i taka sama jak w zderzeniu niesprężystym, ponieważ wyrzutnia nie zmieniła swoich parametrów pracy.

Do opisu ruchu obrotowego wahadła bez pocisku, po zderzeniu aż do zatrzymania się, można użyć zasady zachowania energii podobnie jak w zderzeniu doskonale niesprężystym. Energia samego wahadła $E_{w\mathrm{II}}$ tuż po zderzeniu jest energią kinetyczną ruchu obrotowego

$$E_{w\mathrm{II}} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (13)$$

Energia $E_{w\mathrm{III}}$ wahadła w momencie zatrzymania się i osiągnięcia skrajnego położenia jest energią potencjalną, obliczoną podobnie jak w zderzeniu niesprężystym

$$E_{w\mathrm{III}} = MgH = MgR(1 - cos\alpha_2) \qquad (14)$$

gdzie α_2 jest maksymalnym kątem odchylenia wahadła w zderzeniu sprężystym. Stosując zasadę zachowania energii (15a), po uwzględnieniu zależności (13) i (14) otrzymujemy równanie (15b)

$$E_{w\mathrm{II}} = E_{w\mathrm{III}} \qquad (15a)$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = MgR(1 - cos\alpha_2) \qquad (15b)$$

Wyznaczając z powyższego równania prędkość kątową po zderzeniu

$$\omega = \sqrt{\frac{2MgR(1-cos\alpha_2)}{I}} \qquad (16)$$

i podstawiając do równania (12) dostajemy równanie

$$mvr = I\sqrt{\frac{2MgR(1-cos\alpha_2)}{I}} + mru \tag{17}$$

z którego można obliczyć nieznaną prędkość pocisku po zderzeniu sprężystym

$$u = v - \frac{\sqrt{2\,I\,MgR\,(1-cos\alpha_2)}}{mr} \tag{18}$$

Zgodnie z konwencją przyjętą w równaniu (12), dodatnia wartość tej prędkości jest dla jej zwrotu zgodnego z prędkością początkową v.

W zderzeniu sprężystym także jest godne uwagi to, jaka część początkowej energii pocisku została uniesiona przez wahadło i przez pocisk w formie energii mechanicznej, a jaka część została zamieniona na energię cieplną. Energia początkowa pocisku E_{I} jest dana zależnością (10), a po zderzeniu energia mechaniczna wahadła $E_{w\mathrm{II}}$ na podstawie zasady zachowania energii (15a) jest równa jego energii końcowej $E_{w\mathrm{III}}$ danej wzorem (14). Oczywiście do energii wahadła po zderzeniu należy dodać energię pocisku po zderzeniu $E_{p\mathrm{II}} = \frac{1}{2}mu^2$. Dlatego stosunek całkowitych energii mechanicznych przed i po zderzeniu, który można nazwać sprawnością zderzenia, jest równy

$$\eta_2 = \frac{E_{\mathrm{II}}}{E_{\mathrm{I}}} = \frac{E_{w\mathrm{II}}+E_{p\mathrm{II}}}{E_{\mathrm{I}}} = \frac{E_{w\mathrm{III}}+E_{p\mathrm{II}}}{E_{\mathrm{I}}} = \frac{MgR(1-cos\alpha_2) + \frac{1}{2}mu^2}{\frac{1}{2}mv^2} \tag{19}$$

Po wstawieniu prędkości pocisku po zderzeniu u danej wzorem (18) otrzymujemy

$$\eta_2 = \frac{MgR(1-cos\alpha_2) + \frac{1}{2}m\left(v - \frac{\sqrt{2\,I\,MgR\,(1-cos\alpha_2)}}{mr}\right)^2}{\frac{1}{2}mv^2} \tag{20}$$

2.3. Pomiar istotnych wielkości fizycznych

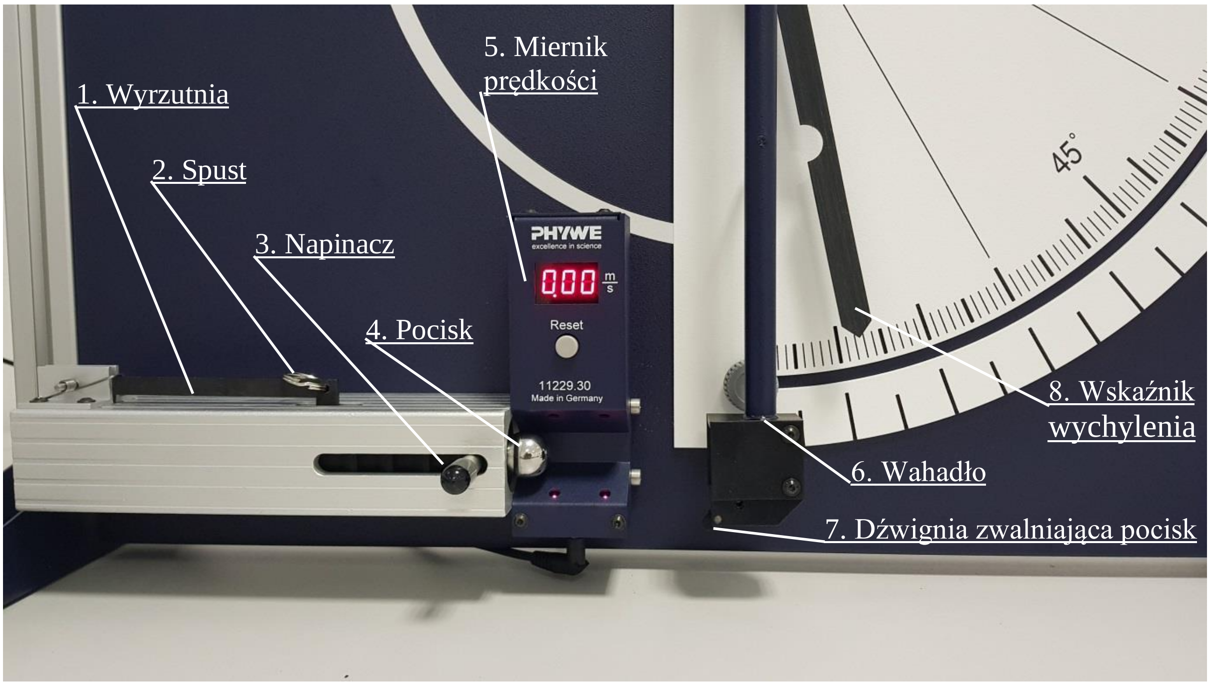
Do obliczenia prędkości pocisku v oraz sprawności η_1 i η_2 zderzenia doskonale niesprężystego i sprężystego potrzebne są masy m i M pocisku i wahadła oraz odległości r i R ich środków masy od osi obrotu. Ponieważ do pomiaru właściwości wahadła potrzebny jest jego demontaż, powyższe wielkości zmierzono wcześniej jednorazowo i należy je traktować jako dokładnie dane. Najtrudniej jest zmierzyć równie potrzebny moment bezwładności I_o wahadła. W celu uzyskania tej wielkości posłużono się wzorem na okres drgań wahadła fizycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{MgR}} \tag{21}$$

Widać, że należało zmierzyć okres drgań wahadła T i za pomocą powyższego wzoru obliczyć jego moment bezwładności I_o, którą to wartość także należy traktować jako dokładnie daną.

3. Metodologia wykonania pomiarów

Urządzenie pomiarowe przedstawione jest na rys. 3. Zaopatrzone jest ono w wyrzutnię 1 z mechanizmem sprężynowym, składającym się, oprócz niewidocznej tu sprężyny, z napinacza 3 i spustu 2. Pocisk jest metalową kulką 4 wprawianą w ruch przez wyrzutnię. Pocisk uderza we wnękę wahadła 6, w której zostaje uwięziony przez mechanizm zapadkowy (zderzenie doskonale niesprężyste), lub w od której się odbija (zderzenie sprężyste) po unieruchomieniu mechanizmu zapadkowego. Na skutek tego uderzenia wahadło zaczyna poruszać się ruchem obrotowym i przy tym popychać lekki wskaźnik 8, który pokazuje maksymalne wychylenie na skali kątowej. Do uwolnienia pocisku z wnęki wahadła służy dźwignia zwalniająca 7. Chociaż celem ćwiczenia jest pośredni pomiar prędkości pocisku za pomocą pomiaru odchylenia wahadła, to dla kontroli prędkość tę można także mierzyć na bieżąco miernikiem prędkości 5 z wyświetlaczem cyfrowym. Miernik ten za pomocą układu dwóch fotokomórek mierzy czas, w którym pocisk przebywa znany dystans dzielący te fotokomórki.



Rys. 3. Urządzenie pomiarowe

4. Kolejność wykonywania czynności:

Uwaga: Jeżeli na dolnej części wahadła nie znajduje się taśma klejąca, pomiary zaczynamy od punktu 1 (zderzenie doskonale niesprężyste), a w przypadku obecności taśmy klejącej pomiary zaczynamy od zderzenia sprężystego – punkty 1, 9 i 10.

1. Podłączyć urządzenie do sieci 230 V. Odchylić wskaźnik wychylenia 8 do około 50°. Jeżeli wskaźnik opada, należy poprosić prowadzącego lub pracownika technicznego o dokręcenie śruby usztywniającej wskaźnik. Przymocować do wahadła 6 dodatkowe ciężarki w liczbie podanej przez prowadzącego zajęcia (od 0 do 4), przykręcając je od dołu śrubą. Zanotować ich liczbę n.
2. Umieścić pocisk 4 w magnetycznym gnieździe wyrzutni 1 w miejscu jak na rys. 3 i naciągnąć napinacz 3 do usłyszenia stuknięcia zapadki.
3. Wyzerować położenie wahadła 6 (α=0) i położenie wskaźnika wychylenia 8. Wyzerować wskazania miernika prędkości 5 przyciskiem z napisem Reset.
4. Wystrzelić pocisk z wyrzutni 1 za pomocą spustu 2. Zanotować widoczną na wyświetlaczu prędkość v_o pocisku oraz kąt wychylenia α wskaźnika 8.
5. Przytrzymując delikatnie prawą ręką wahadło, lewą dłoń podstawić pod wahadło i przesunąć ją w lewo o kilka milimetrów zwalniając przy tym dźwignię 7. Pocisk powinien opaść na dłoń.
6. Z powodu oporów ruchu wskaźnika wahadło jest przez niego hamowane i układ wahadło-wskaźnik nie osiąga docelowego maksymalnego kąta wychylenia. Dlatego czynności z punktów od 2 do 5, jednak bez zerowania położenia wskaźnika wychylenia 8, należy powtarzać dotąd, aż wskaźnik ten przestanie zmieniać swoje wychylenie.
7. To maksymalne wychylenie wskaźnika jest kątem α_1 dla zderzenia doskonale niesprężystego.
8. Przechodząc do badania zderzenia sprężystego należy unieruchomić mechanizm zapadkowy znajdujący się we wnęce wahadła. W tym celu można użyć taśmy klejącej. Żeby nie naruszyć

delikatnego łożyska wahadła, należy przestrzegać następujących reguł postępowania. Delikatne przyklejanie taśmy zaczynamy od prawej a następnie tylnej ścianki wahadła, po czym dociskamy przyklejone miejsca. Potem, wciąż przytrzymując jedną ręką wahadło, napinamy taśmę i zaklejamy z lewej strony wnękę wahadła oraz jego przednią i prawą ściankę. Odcinamy taśmę i delikatnie dociskamy nowoprzyklejone miejsca.

9. Wykonać czynności z punktów 2, 3, 4, 6. Końcowe maksymalne wychylenie wskaźnika jest kątem α_2 dla zderzenia sprężystego.
10. Jeżeli nie zbadano zderzenia doskonale niesprężystego, należy delikatnie odkleić taśmę klejącą (przytrzymując drugą ręką wahadło) i przeprowadzić pomiary według punktów od 2 do 7.

Zanotować wielkość działki elementarnej $\Delta\alpha$ skali kątowej.

Tabela pomiarowa

Liczba dodatkowych ciężarków	Zderzenie dosk. niesprężyste		Zderzenie sprężyste	
n	v_0	α	v_0	α
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
		$\alpha_1 =$		$\alpha_2 =$

Wielkości dane (należy traktować je jako znane bardzo dokładnie):
– m = 28.5 g – masa pocisku,
– M_o = 99 g – masa samego wahadła,
– m_c = 10 g – masa każdego dodatkowego ciężarka,
– m_s = 2 g – masa śruby mocującej ciężarki,
– r = 240 mm – odległość toru pocisku od osi obrotu wahadła,
– R_o = 125 mm – odległość środka masy samego wahadła od jego osi obrotu,
– T = 0.9518 s – okres wahań samego wahadła.

5. Obliczenia

1. Obliczyć masę wahadła z ciężarkami wg wzoru

$$M = M_o + \mathrm{sgn}(n)\, m_s + n\, m_c$$

gdzie funkcja signum, czyli sgn(n), przyjmuje wartość 1 dla dodatniego n, wartość 0 dla zerowego n i wartość -1 dla ujemnego n (z łac. signum – znak).
Obliczyć odległość środka masy wahadła z ciężarkami od osi obrotu wg wzoru

$$R = \frac{M_o R_o + \mathrm{sgn}(n)\, m_s\,(0.259+0.0031n) + n\, m_c(0.265+0.00155n)}{M}$$

gdzie wszystkie jawne liczby wyrażone są w metrach.
Obliczyć moment bezwładności I_o samego wahadła ze wzoru (21).
Obliczyć moment bezwładności wahadła z ciężarkami wg wzoru

$$I = I_o + \mathrm{sgn}(n)\, m_s\,(0.259 + 0.0031n)^2 + n\, m_c(0.265 + 0.00155n)^2$$

2. Obliczyć ze wzoru (9) prędkość v pocisku, którą uznajemy za zmierzoną pośrednio za pomocą wahadła balistycznego.
3. Obliczyć niepewność standardową $u(\alpha)$ pomiaru kąta metodą typu B.
4. Obliczyć niepewność standardową $u(v)$ z prawa przenoszenia niepewności bazując na $u(\alpha)$.
5. Obliczyć średnią prędkość $v_{śr}$ pocisku pokazywaną przez miernik cyfrowy, na podstawie wszystkich prędkości v_o niezależnie od typu zderzenia, ponieważ prędkość v_o i jej pomiar nie zależą od typu zderzenia.
6. Obliczyć metodą typu A niepewność standardową $u(v_o)$ pomiaru prędkości v_o przez miernik cyfrowy oraz niepewność standardową $u(v_{śr})$ średniej prędkości.
7. Obliczyć prędkość pocisku u po zderzeniu sprężystym ze wzoru (18). Do obliczeń użyć, jako dokładniejszą, średnią prędkość $v_{śr}$ pocisku pokazywaną przez miernik cyfrowy.
8. Obliczyć niepewność $u(u)$ z prawa przenoszenia niepewności bazując na $u(\alpha)$ i $u(v_{śr})$.
9. Obliczyć sprawności η_1 i η_2 odpowiednio zderzenia doskonale niesprężystego i sprężystego ze wzorów (11) i (22). Kąty α_1 i α_2 są końcowym maksymalnym wychyleniem wskaźnika dla danego typu zderzenia. Do obliczeń użyć, jako dokładniejszą, średnią prędkość $v_{śr}$ pocisku pokazywaną przez miernik cyfrowy.
10. Obliczyć niepewności standardowe $u(\eta_1)$ i $u(\eta_2)$ z prawa przenoszenia niepewności bazując na $u(\alpha)$ i $u(v_{śr})$.
11. We wnioskach na początku poprawnie zapisać końcowe wyniki v, u, η_1 i η_2 wraz z ich niepewnościami, a także poprawnie porównać ze sobą prędkości pocisku v i v_o zmierzone obiema metodami oraz sprawności η_1 i η_2 obu typów zderzeń. Porównać z zerem prędkość pocisku u po zderzeniu sprężystym w celu stwierdzenia kierunku tej prędkości. Oczywiście wszystkich porównań dokonuje się za pomocą niepewności.