Wyznaczanie stałej grawitacji z wykorzystaniem grawitacyjnej wagi skręceń

1. Zagadnienia do opracowania:

1. Pole grawitacyjne. Prawo powszechnego ciążenia.
2. Zasady dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego. Moment siły, moment bezwładności.
3. Ruch drgający harmoniczny, ruch drgający tłumiony.

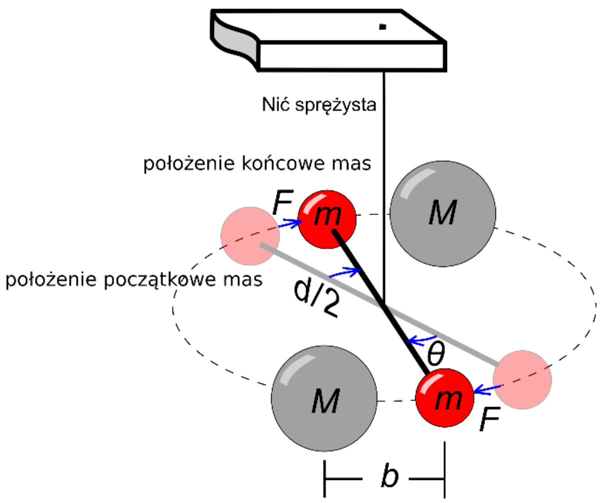
Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy Fizyki, WN PWN Warszawa 2012, t.1.
2. Fizyka dla szkół wyższych Tom I, Openstax, 2018
3. K. Krop, K. Chłędowska, Fizyka I Pracownia, OWPRz, Rzeszów 2010, str. 236-262.

2. Wprowadzenie

2.1. Grawitacyjna waga skręceń

Waga skręceń, zwana także wagą Cavendisha jest przyrządem pozwalającym wyznaczać bardzo małe wartości sił, np. elektrostatycznych lub grawitacyjnych. Na rysunku przedstawiono schematycznie ideę działania takiej wagi. Przyrząd ten składa się z dwóch jednakowych małych mas m (kul) umieszczonych na końcach lekkiej, poziomej belki, która z kolei jest zawieszona na cienkiej, skrętnej nici. Jeśli w pobliżu małych mas zostaną umieszczone inne np. dwie duże masy M oddziaływanie grawitacyjne pomiędzy tymi masami spowoduje skręcenie nici na których zostały zawieszone małe masy m. Pomiar kąta skręcenia θ pozwala na wyznaczenie siły oddziaływania grawitacyjnego. Jeśli masy zastąpimy np. ciałami naładowanymi ładunkiem elektrycznym przyrząd taki może posłużyć do wyznaczenia sił elektrostatycznych.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie zasady działania wagi skręceń. Na rysunku nie zaznaczono sił działających na masy M.

Pierwotnie waga skręceń skonstruowana została niezależnie przez Johna Michella i Charles'a Coulomba, który badał za jej pomocą siły elektrostatyczne. Henry Cavendish użył wagi skręceń do wyznaczenia stałej grawitacji.

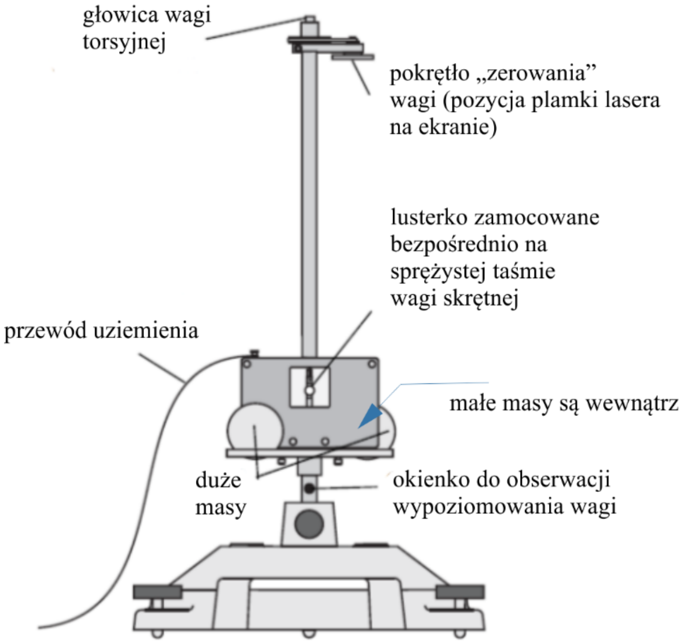
Nawet pomimo zastosowania możliwie najcięższych, ołowianych kul, siły oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy nimi są na tyle małe, że przygotowywany przez Cavendisha eksperyment wymagał wyjątkowych starań, polegających między innymi na całkowitym zabudowaniu wagi skręceń, tak, by podmuchy powietrza i inne podobne zakłócenia nie mogły wpływać na jej zachowanie. Stosując swój układ, wyposażony w lusterka umożliwiające badanie niewielkich wartości skręcenia, Cavendish wykonał pierwszy w dziejach bezpośredni eksperyment pozwalający na obliczenie stałej grawitacji.

2.2. *Wyprowadzenie zależności na stałą grawitacji*

Budowa i zasada działania wagi skrętnej użytej w eksperymencie jest bardzo podobna do tej przedstawionej w rozdziale 2.1.

Schematycznie wagę dostępną w laboratorium pokazano na Rys. 2. Waga ta posiada dodatkowe lusterko zamocowane na taśmie skrętnej. Na lusterko pada światło lasera, które odbija się od niego a następnie pada na ekran z przymocowaną podziałką. Ruch plamki lasera wzdłuż podziałki pozwala obserwować wahania ramienia wagi.

Wyznaczenie stałej grawitacji jest możliwe za pomocą trzech procedur, które zostały opisane po kolei poniżej. Biorąc pod uwagę czas dostępny na zajęciach możliwe jest wykonanie pomiarów tylko z wykorzystaniem metody opisanej jako „metoda 2”.



Rys. 2 Schematyczne przedstawienie grawitacyjnej wagi skręceń (stanowisko pomiarowe).

2.3. **Metoda pomiaru 1** *(czas pomiaru – kilkanaście godzin, dokładność 5%)*

Jeśli duże masy znajdują się początkowo w pozycji I (Rys. 3), to siła przyciągania grawitacyjnego F między każdą małą masą (m_2) a jej sąsiednimi dużymi masami (m_1) jest określona przez prawo powszechnego ciążenia:

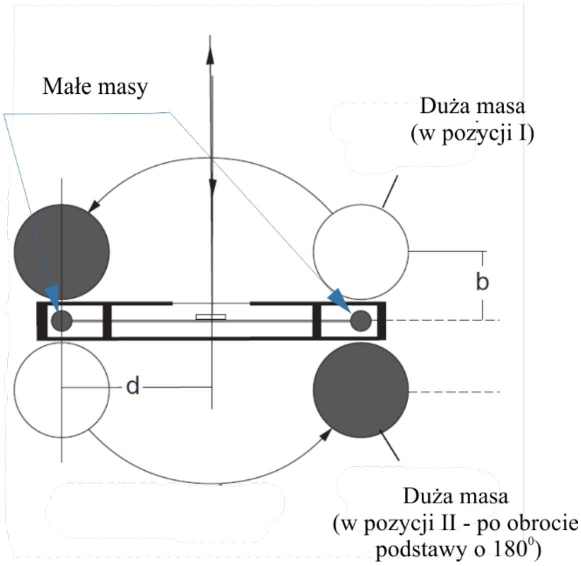
$$F = G\frac{m_1 m_2}{b^2} \tag{1}$$

$b -$ odległość między masami.

Przyciąganie grawitacyjne między dwiema małymi masami i sąsiednimi dużymi masami wytwarzają względem osi obrotu wahadła skrętnego moment obrotowy (τ_{graw})

$$\tau_{graw} = 2Fd \tag{2}$$

Gdzie d jest długością ramienia działania siły.



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego.

Ponieważ układ jest w równowadze, to skręcanie taśmy na której wiszą małe masy, musi dostarczać równy i przeciwny moment obrotowy. Ten moment obrotowy (τ_{band}) jest równy iloczynowi stałej skręcania dla taśmy skrętnej (κ) oraz kąta, o który ta taśma jest skręcona (θ),

$$\tau_{band} = \kappa\theta \tag{3}$$

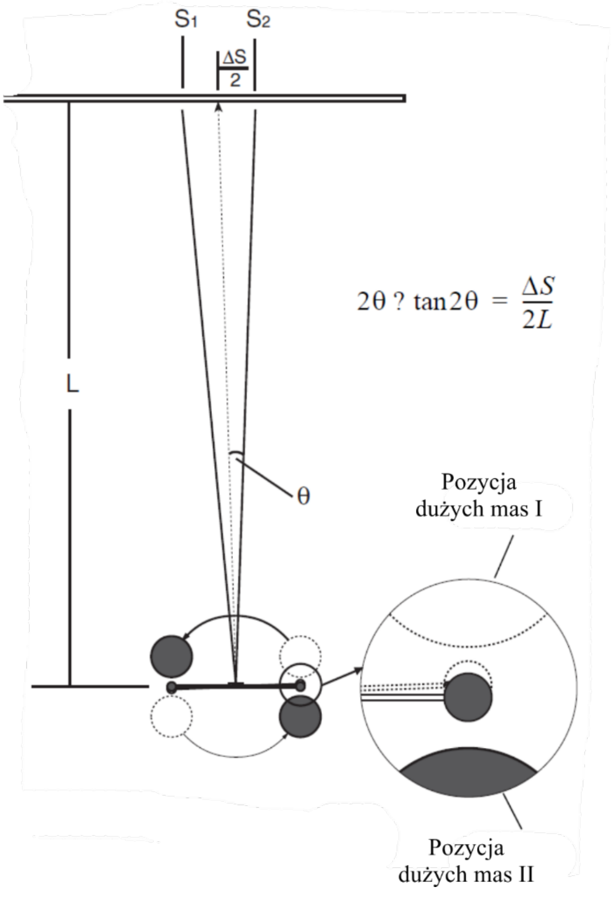
Kombinacja równań (1), (2), (3) prowadzi do zależności:

$$\kappa\theta = \frac{2dGm_1m_2}{b^2} \tag{4}$$

Przekształcając to równanie tak aby wyliczyć stałą grawitacji otrzymujemy

$$G = \frac{\kappa\theta b^2}{2dm_1m_2} \tag{5}$$

Aby wyznaczyć wartości θ i κ, które są jedynymi niewiadomymi w równaniu (5) konieczne jest obserwowanie oscylacji układu małych mas, gdy ich równowaga jest zaburzona. Po ustabilizowaniu się wagi w położeniu S_1 (położenie plamki na ekranie), obracamy podporę z dużymi masami o 180 stopni , dzięki czemu duże masy są przesuwane do pozycji II. System będzie wtedy oscylował, aż w końcu zwalnia i zatrzymuje się w nowej pozycji równowagi (S_2) (Rys. 4).



Rys. 4. Położenia mas I i II, oraz położenia równowagi S1 i S2 – widok z góry układu.

W nowej pozycji równowagi (S_2) taśma skrętna będzie nadal skręcony pod kątem θ, ale w przeciwną stronę w odniesieniu do skrętu, który miał miejsce wówczas gdy duże masy były w pozycji I, czyli całkowita zmiana kąta jest równa 2θ. Biorąc pod uwagę, że kąt jest również podwajany przy odbiciu od lustra (prawo odbicia, kąt odbicia jest równy kątowi padania) otrzymamy po kolei następujące zależności:

$$\Delta S = S_2 - S_1$$

$$4\theta = \frac{\Delta S}{L}$$

$$\theta = \frac{\Delta S}{4L}$$

Stałą skręcenia κ można wyznaczyć obserwując okres T oscylacji i następnie wykorzystując równanie

$$T^2 = \frac{4\pi I}{\kappa}$$

Gdzie I jest momentem bezwładności układu małych mas.

Moment bezwładności zwierciadła i układu na którym są zawieszone małe masy jest pomijalnie mały w porównaniu do tego pochodzącego od samych mas, więc całkowity moment bezwładności może być wyrażony jako:

$$I = 2m_2\left(d^2 + \frac{2}{5}r^2\right)$$

Zatem otrzymujemy:

$$\kappa = 8\pi^2 m_2 \frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{T^2}$$

Podstawiając do (5) otrzymujemy:

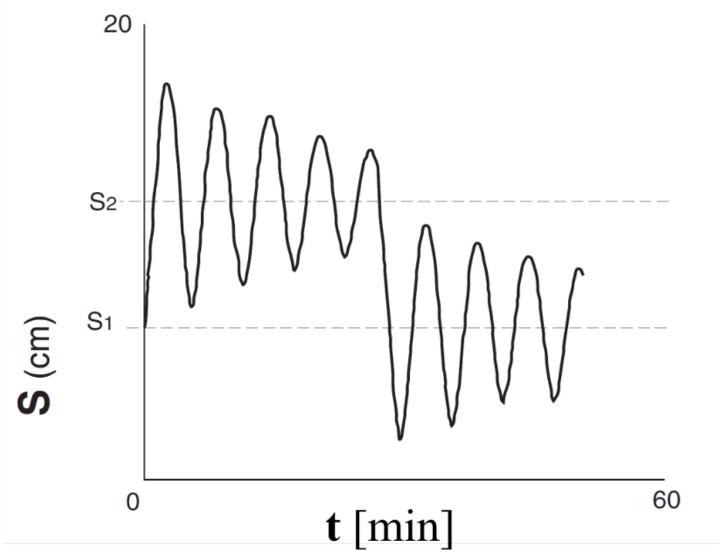
$$G = \pi^2 \Delta S b^2 \left(\frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{T^2 m_1 L d} \right) \tag{6}$$

Wszystkie wartości po prawej stronie równania są znane lub mogą zostać zmierzone/wyznaczone:

$r = 9{,}55\ mm \quad (r = 8.19\ mm)$
$d = 50\ mm$
$b = 42{,}2\ mm$
$m_1 = (1{,}5 \pm 0{,}01)\ kg$
$L,\ \Delta S,\ T\ -$ należy zmierzyć

***2.4. Metoda pomiaru 2** (czas pomiaru – ok. 45 minut, dokładność 5%)*

Metoda ta nie różni się zasadniczo od metody 1. Położenia końcowe $S_1\ i\ S_2$ plamki świetlnej lasera na ekranie wyznacza się bez czekania aż waga osiągnie równowagę. Położenia równowagi wyznacza się na podstawie wykresu oscylacji małych mas wokół dwóch położeń równowagi, które powstają przy ustawieniu dużych mas najpierw w położeniu I a następnie w położeniu II. Gdy duże masy umieszczone na wsporniku obrotowym zostają kolejno przesunięte do pozycji I a następnie do pozycji II, wówczas waga skręceń oscyluje za każdym razem wokół nowych pozycji równowagi $S_1\ i\ S_2$. Te oscylacje można opisać równaniem tłumionej sinusoidy z „przesunięciem”, gdzie wartość przesunięcia reprezentuje punkt równowagi wahadła przy określonej pozycji dużej masy (pozycja I lub pozycja II). Znajdując na podstawie wykresu $S(t)$ położenia równowagi wagi $S_1\ i\ S_2$ a następnie wyliczając różnicę tych położeń, otrzymujemy wartość ΔS. Okres oscylacji T odczytuje się bezpośrednio z wykresu $S(t)$.



Rys. 5. Oscylacje małych mas wokół położenia równowagi przy dwóch położeniach mas dużych (Położenie 1 i Położenie 2) – typowa zależność.

Stałą grawitacji wyznacza się wówczas z tego samego wzoru co w wyżej opisanej metodzie 1, równanie (10)

__2.5. Metoda Pomiaru 3__ (czas pomiaru – około 10 minut, dokładność 15%)

Jeśli duże masy znajdują się początkowo w pozycji I (Rys. 3), to siła przyciągania grawitacyjnego F między każdą małą masą (m_2) a jej sąsiednimi dużymi masami (m_1) jest określona przez prawo powszechnego ciążenia:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{b^2} \tag{7}$$

$b -$ odległość między masami: małą i dużą.

Siła działająca na małe masy, jest równoważona momentem obrotowym wytwarzanym przez skręconą taśmę, do której są zamocowane małe masy m_2, dzięki czemu układ jest w równowadze. Kąt skręcenia θ, mierzy się, odnotowując położenie plamki świetlnej (Rys. 6), jest to miejsce gdzie na ekran (na którym naniesiono odpowiednią skalę) pada odbita od lusterka wiązka światła. Pozycję tą należy dokładnie odnotować, a następnie duże masy są przenoszone do pozycji II. Zmiana pozycji dużych mas zakłóca równowagę układu małych mas, który teraz będzie oscylował, aż tarcie spowolni go i układ ustabilizuje się w nowej pozycji równowagi.

Ponieważ okres oscylacji małych mas jest dość długi (około 10 minut), to nie poruszają się one znacząco wówczas gdy duże masy są przenoszone z pozycji I do pozycji II.

Ze względu na symetrię konfiguracji, duże masy znajdujące się w pozycji II wywierają taką samą siłę grawitacyjną na małe masy, jak w pozycji I, ale zwrot tej siły jest przeciwny. Ponieważ siła równoważąca pochodząca od skręcania taśmy nie zmieniła się (początkowo, tuż po obrocie przyjmujemy przybliżenie że siłą ta się nie zmienia w trakcie krótkiego pomiaru), całkowita siła (F_{total}) która działa na małe masy i nadaje im przyspieszenia jest równa dwukrotności wartości siły grawitacyjnej pochodzącej od dużych mas:

$$F_{total} = 2F = 2G\frac{m_1 m_2}{b^2} \tag{8}$$

Każda mała masa jest zatem przyspieszana w kierunku sąsiedniej dużej masy, z początkowym przyspieszeniem a_0, które wyraża się równaniem wynikającym bezpośrednio z II zasady dynamiki:

$$m_2 a_0 = 2G\frac{m_1 m_2}{b^2} \tag{9}$$

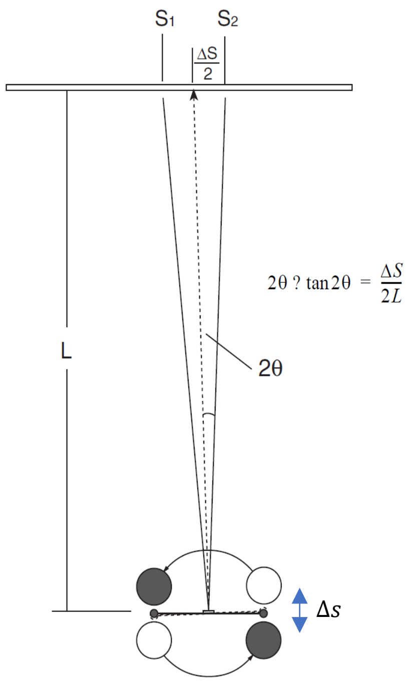
Oczywiście, gdy małe masy zaczynają się poruszać, taśma skrętna staje się coraz mniej naprężona, tak że siła maleje i zmniejsza się ich przyspieszenie. Jeśli system jest obserwowany przez stosunkowo długi okres czasu, to będą widoczne jego oscylacje. Jeśli jednak przyspieszenie małych mas zostanie zmierzone, zanim moment obrotowy pochodzący od taśmy skrętnej ulegnie znacznej zmianie, do wyznaczenia stałej grawitacji G można zastosować równanie (9).

Biorąc pod uwagę naturę ruchu układu małych mas (tłumiony harmoniczny) początkowe przyspieszenie jest stałe z dokładnością do około 5% w czasie t równym jednej dziesiątej okresu oscylacji (już wcześniej podano, że $T = 10\ [min]$). Dobre wyniki można zatem uzyskać, jeśli przyspieszenie wyznaczy się w ciągu pierwszej minuty po przestawieniu dużych mas.

Do wyznaczenia stałej grawitacji można wówczas zastosować następującą zależność, wynikającą bezpośrednio z przekształcenia równania (9):

$$G = b^2\frac{a_0}{2m_1} \tag{10}$$

Nieznane przyspieszenie a_0 mierzy się obserwując przemieszczenie ΔS plamki świetlnej na ekranie, które jest ściśle związane z przemieszczeniem małych mas Δs. Schematycznie pokazano to na rysunku (Rys. 6):



Δs - przemieszczenie liniowe małych mas (oznaczone na rysunku schematycznie, jego wartość jest bardzo mała),

d - odległość od środka masy małych mas do osi obrotu wagi skrętnej,

ΔS - przemieszczenie plamki świetlnej na ekranie, oraz

L - odległość podziałki od lusterka wagi,

biorąc pod uwagę podwojenie kąta odbicia (jeśli lusterko obróciło się o kąt θ, to kąt pomiędzy promieniem padającym i odbitym wynosi 2θ)

$$\Delta S = \Delta s\left(\frac{2L}{d}\right) \tag{11}$$

Korzystając z równania ruchu dla obiektu o stałym przyspieszeniu $x = 1/2at^2$, przyspieszenie małych mas można obliczyć:

$$a_0 = \frac{2\Delta s}{t^2} = \frac{\Delta S d}{t^2 L} \tag{12}$$

Monitorując ruch/położenie plamki świetlnej w funkcji czasu, przyspieszenie a_0 małych mas można wyznaczyć z równania (12), a stałą grawitacji można następnie wyznaczyć korzystając z równania (10).

UWAGA: Pomiary na laboratorium studenckim wykonać wykorzystując metodę określoną jako metoda 2

3. Metodologia wykonania pomiarów (metoda 2)

1. Sprawdzić czy waga jest wypoziomowana. Jeśli jest to potrzebne należy wypoziomować wagę skręceń. Wszystkie operacje należy wykonywać powoli i z dużą ostrożnością. **UWAGA! Wprowadzenie wagi w duże drgania uniemożliwia rozpoczęcie pomiarów!**
2. Rozpoczęcie pomiarów nie wymaga aby waga/wahadło przestało oscylować, ale wahania powinny być jak najmniejsze (jeśli wahania wagi są duże, można użyć przycisków do aretowania wagi, znajdujących się od spodu „skrzynki" z małymi masami).
   a. Zanotować w jakim położeniu jest duża masa (duża masa po prawej stronie - Pozycja I, duża masa po lewej stronie – pozycja II).
   b. Zaobserwować fazę ruchu plamki świetlnej – tzn. zaobserwować czy mała kulka zbliża się do dużej kuli czy oddala (w tym celu przeanalizuj kierunek ruchu plamki lasera na ekranie). **Następny krok można rozpocząć wtedy gdy mała kulka jest w takiej fazie swojego ruchu, że oddala się od dużej masy!!!**
   c. Obrócić podporę dużych mas do przeciwnej pozycji niż pozycja wyjściowa i natychmiast po obrocie należy obserwować plamkę świetlną. Zapisuj pozycję plamki świetlnej S i czas t co 15 sekund. Kontynuuj zapisywanie pozycji i czasu przez około 30 minut.
   d. Obróć podporę dużych mas do przeciwnej pozycji. Powtórz procedurę opisaną w kroku (c) przez kolejne 30 minut.
3. Skonstruuj wykres położenia plamki świetlnej w funkcji czasu dla obu pozycji dużych mas. Wykreśl wykres podobny do tego na Rys. 5
4. Analizując wykres, znajdź punkt równowagi dla każdej konfiguracji dużych mas (pozycja I, pozycja II). W tym celu użyj graficznej analizy w celu wyznaczenia spoczynkowych punktów równowagi S1 i S2 (punktem równowagi będzie linia środkowa wokół której odbywają się oscylacje). Znajdź różnicę między dwoma pozycjami równowagi i zapisz wynik jako ΔS.
5. Określ okres oscylacji T systemu małych mas, analizując obie części wykresu. Z analizy obu części wykresu otrzymasz nieco inny wynik. Policz średnią tych wyników i zapisz jako T.
6. Użyj swoich wyników i równania (10), aby określić wartość stałej grawitacji G.
7. Określ niepewności wszystkich wielkości, które były mierzone lub wyznaczane w tym ćwiczeniu.

Tabela pomiarowa:

t $[s]$	S [mm]	S_1 $[mm]$	S_2 $[mm]$	ΔS $[mm]$	T [s]	G
0						
15						
30						
…..						
120						

4. Metodologia wykonania pomiarów (metoda 3 – do wykonania jako demonstracja)

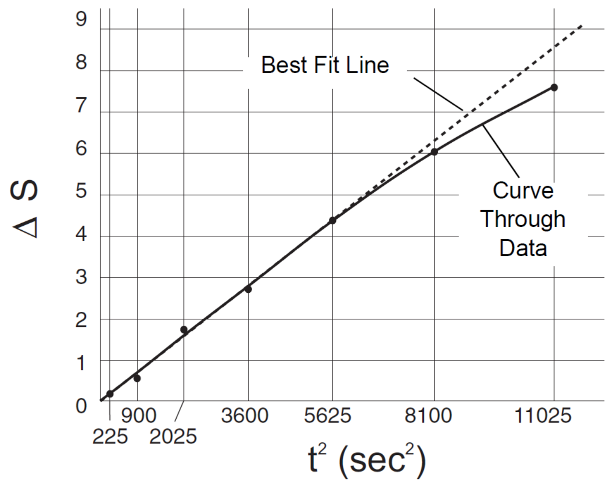
1. Wypoziomować wagę skręceń (z dużymi masami w pozycji I). Doprowadzić do sytuacji kiedy waga/wahadło przestanie oscylować.
2. Włączyć laser i przez kilka minut obserwować punkt końcowy wagi w pozycji I, aby upewnić się, że system jest w równowadze.
3. Zapisać położenie (S_1) plamki światła lasera (punkt końcowy Pozycja I) tak dokładnie, jak to możliwe. Należy również wskazać wszelkie zmiany położenia plamki w czasie, jako margines błędu pomiaru.
4. Ostrożnie obrócić podporę obrotową tak, aby duże masy zostały przesunięte do pozycji II. Kule powinny tylko dotykać obudowy, należy uważać, aby nie uderzyć obudowy i nie zakłócać systemu.
5. Natychmiast po obróceniu wspornika obrotowego obserwować punkt świetlny. Należy zapisywać położenie plamki świetlnej (S) i czas (t) co 15 sekund przez około dwie minuty.

Tabela pomiarowa:

S_1 $[mm]$	ΔS_1 $[mm]$	t $[s]$	S $[mm]$			
		0				
		15				
		30				
		…..				
		120				

5. Obliczenia

1. Narysuj wykres przemieszczenia plamki świetlnej ($\Delta S = S - S_1$ w funkcji kwadratu czasu (t^2) z t^2 na osi poziomej. Wykreśl linię prostą, która jest najlepszym dopasowaniem do punktów pomiarowych (weź pod uwagę dane z pierwszych 60 sekund obserwacji).
2. Określ nachylenie linii z metody najmniejszych kwadratów. Niepewności parametrów prostej również określ z metody najmniejszych kwadratów.
3. Wykorzystaj równania: (12) i (10)) do wyznaczenia stałej grawitacyjnej.
4. Wartość obliczona w kroku 3 obarczona jest błędem systematycznym. Mała kula jest przyciągana nie tylko do sąsiedniej dużej kuli, ale także do drugiej dużej kuli - bardziej odległej, chociaż ze znacznie mniejszą siłą. Użyj procedury opisanej w dokumentacji wahadła (metoda I), aby skorygować tę siłę.



Rys. 7. Przykładowe wyniki pomiarów naniesione na wykres, wraz z linią najlepszego dopasowania.