

Sprawdzanie II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego brył

Wymagania do ćwiczenia

1. Wielkości charakteryzujące kinematykę i dynamikę ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej.
2. Zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej.

Literatura

1. R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Podstawy fizyki t.1, PWN, Warszawa, 2011, str. 259-329.
2. I.W. Sawieliew, Wykłady z fizyki t.1, PWN, Warszawa, 1994, str. 150-165.
3. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1, Rozdział 10: Obroty wokół stałej osi.

Przykładowe pytania

1. Jak definiuje się bryłę sztywną i jakie właściwości fizyczne ją charakteryzują?
2. Na czym polega różnica między ruchem postępowym a ruchem obrotowym bryły sztywnej?
3. Jak definiujemy prędkość kątową i przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym?
4. Czym różni się prędkość liniowa punktu w bryle sztywnej od jego prędkości kątowej? Dlaczego w ruchu obrotowym bryły sztywnej wszystkie jej punkty mają tę samą prędkość kątową, ale różną liniową?
5. Co to jest moment pędu i jak różni się od pędu liniowego?
6. Jak wyznacza się moment siły względem wybranej osi obrotu? Podaj jego definicję wektorową oraz regułę określającą jego zwrot?
7. Jak brzmi II zasada dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej?
8. Czym jest moment bezwładności i od czego zależy jego wartość dla danej bryły?
9. Jakie są analogie między wielkościami opisującymi ruch postępowy i obrotowy?
10. Wyjaśnij twierdzenia Steinera. Jakie warunki muszą być spełnione, aby można było zastosować twierdzenie Steinera?

11. Jaka jest zasada pomiaru z użyciem suwmiarki?
12. Na czym polega metoda najmniejszych kwadratów?
13. Wyjaśnij zasadę wyznaczania momentu bezwładności bryły sztywnej przy użyciu wahadła Oberbecka.
14. Jak określamy niepewność pomiaru przyrządem z wyświetlaczem cyfrowym?
15. Na czym polega prawo przenoszenia niepewności?
16. Co to jest cyfra znacząca? Podaj zasady poprawnego zaokrąglania wyników pomiarów.

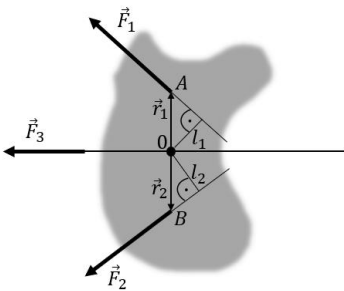
Przyrządy pomiarowe

Suwmiarka, gotowy zestaw pomiarowy do pomiaru czasu opadania masy m .

WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Ruch obrotowy symetrycznej bryły sztywnej wokół nieruchomej osi



Bryłą sztywną nazywamy układ nieskończenie wielu punktów materialnych przy czym wzajemna odległość r_{ij} każdego dwóch dowolnych punktów nie ulega zmianie niezależnie od wartości działających sił. Inaczej, kawałek ciała stałego, który nie ulega odkształceniu pod wpływem dowolnie dużej siły, nazywamy bryłą sztywną. Załóżmy, że na bryłę sztywną działają siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ leżące w płaszczyźnie rysunku. Tylko siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ będą powodować obrót bryły wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt O .

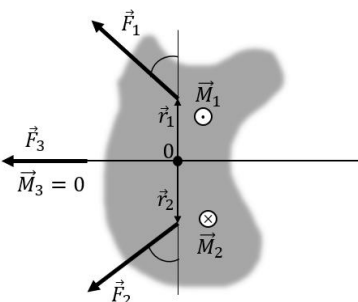
Siła $\vec{F}_3$ spowoduje ruch postępowy bryły sztywnej. Ruch obrotowy bryły sztywnej spowodowany jest momentem siły zależnym od wartości przyłożonej siły i ramienia działania siły. Wartości momentów sił $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ są odpowiednio równe

$$M_1 = l_1 F_1, M_2 = l_2 F_2 \quad (1)$$

gdzie l_1, l_2 są ramionami działania sił $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Ramie działania każdej z sił można zapisać jako

$$l_1 = r_1 \sin \alpha(\vec{r}_1, \vec{F}_1), l_2 = r_2 \sin \alpha(\vec{r}_2, \vec{F}_2) \quad (2)$$

gdzie r_1, r_2 - długości wektorów położenia punktów przyłożenia sił $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ względem osi obrotu.



Wartości momentów sił $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ będą więc równe

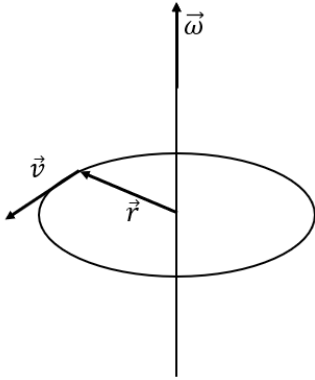
$$M_1 = r_1 F_1 \sin \alpha(\vec{r}_1, \vec{F}_1), M_2 = r_2 F_2 \sin \alpha(\vec{r}_2, \vec{F}_2) \quad (3)$$

Moment siły jest wielkością wektorową, z ostatnich równań wynika, że można go zdefiniować jako

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4)$$

Wektor momentu siły jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{r}, \vec{F}$. Jego zwrot jest określony z wykorzystaniem reguły śruby prawoskrętnej. Wektor momentu siły $\vec{M}_1$ jest zwrócony przed płaszczyznę rysunku, wektor momentu siły $\vec{M}_2$ - zwrócony za płaszczyznę rysunku. Symbolicznie zaznaczono obydwa te wektory na rysunku. Wektor momentu siły $\vec{F}_3$ jest równy zeru, co wynika z faktu, że $\alpha(\vec{r}_3, \vec{F}_3) = 0$.

Ruch postępowy bryły sztywnej można opisać tak jak ruch punktu materialnego, bowiem wszystkie jej punkty mają taką samą prędkość, przyspieszenie i przemieszczenie. W przypadku ruchu obrotowego



wokół nieruchomej osi wszystkie punkty bryły sztywnej poruszają się w płaszczyznach równoległych i zakreślają okręgi o różnych promieniach. Środki tych okręgów leżą na jednej prostej – osi obrotu. Prędkość kątową dowolnego punktu bryły sztywnej możemy powiązać z jego prędkością liniową

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (5)$$

Prędkość kątową wszystkich punktów bryły sztywnej jest jednakowa. Moment pędu pojedynczej cząstki zdefiniowany jest jako

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (6)$$

Różniczkując ten wzór otrzymamy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{=\vec{M}} \quad (7)$$

Pierwszy składnik w ostatnim wzorze jest iloczynem wektorowym wektorów równoległych, dlatego jego wartość jest równa zero. Drugi składnik jest wektorem momentu siły. Otrzymaliśmy wyrażenie na II zasadę dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (8)$$

która mówi, że *moment siły działającej na bryłę sztywną jest równy szybkości zmian wektora momentu pędu*.

Moment pędu układu N punktów materialnych możemy zapisać w postaci

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (9)$$

Jeśli wykorzystamy tożsamość $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, to moment pędu

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \quad (10)$$

W przypadku, gdy $\vec{r}_i \perp \vec{\omega}$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{\omega} \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}_{r_i^2} - \underbrace{\vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{=0} \right] = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = I \vec{\omega} \quad (11)$$

gdzie $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ - moment bezwładności układu punktów materialnych. Ostatnia równość jest również prawdziwa dla bryły sztywnej, a moment bezwładności bryły sztywnej wokół danej osi obrotu wynosi

$$I = \int_V r^2 dm \quad (12)$$

Obliczanie momentu bezwładności dla brył foremnych względem osi symetrii jest stosunkowo proste (patrz ćw. 8). Znacznie trudniej jest obliczyć w podobny sposób moment bezwładności względem każdej innej osi, która nie jest osią symetrii. Można wówczas skorzystać z twierdzenia Steinera (przyjmiemy go bez dowodu): *Moment bezwładności I względem dowolnej osi równy jest sumie momentu bezwładności I_c względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy bryły sztywnej oraz iloczynu masy bryły i kwadratu odległości między osiami a*

$$I = I_c + ma^2 \quad (13)$$

Po uwzględnieniu związku $\vec{L} = I\vec{\omega}$ otrzymamy II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego wokół nieruchomej osi w postaci

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} \quad (14)$$

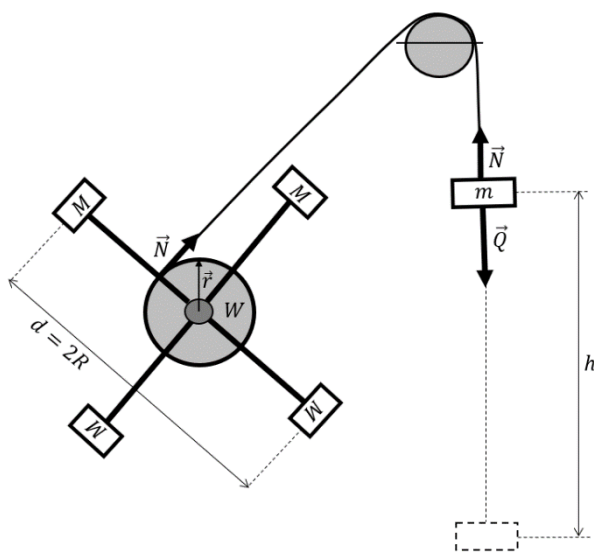
gdzie $\vec{\varepsilon}$ - przyspieszenie kątowe.



Sprawdzenie II zasady dynamiki Newtona dla wahadła Oberbecka

Wahadło Oberbecka składa się z krzyżaka (cztery pręty symetrycznie osadzone na walcu W).

Na każdym pręcie znajduje się ciężarek o masie M . Położenie tych ciężarków możemy zmieniać, zmieniając tym samym moment bezwładności układu.



Na walcu W znajdują się dwa krążki (szpule) o różnych promieniach, na które nawijamy nić, do której na drugim końcu doczepiamy ciężarek (ciężarki) o masie m . Moment siły powodujący obrót wahadła Oberbecka zależy od promienia krążka r , na który nawijamy nić i od masy m doczeplonego ciężarka. Współosiowo z krążkiem osadzony jest hamulec elektromagnetyczny, umożliwiający utrzymanie układu w spoczynku. Po zwolnieniu hamulca ciężarek spada i pokonując drogę h dwukrotnie przecina strumień świetlny fotodetektorów, powodując włączenie i wyłączenie zegara. Pozwala to zmierzyć czas potrzebny na przebycie drogi h .

Ruch prostoliniowy ciężarka zachodzi pod wpływem wypadkowej siły grawitacji i siły naciągu nici, ruch obrotowy jest wynikiem działania momentu siły naciągu nici. Spadający ciężarek wprawia w ruch obrotowy wahadło Oberbecka (krzyżak wraz z czterema ciężarkami o masie M). Równania opisujące ruch obrotowy wahadła o momencie bezwładności I i ruch postępowy ciężarka o masie m mają postać

$$\begin{cases} I\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{N} \\ m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{N} \end{cases} \quad (15)$$

gdzie $\vec{N}$ jest naciągiem nici, a r jest promieniem szpuli, na którą nawinięto nić.

Wektory $\vec{r}$ i $\vec{g}$ leżą w płaszczyźnie rysunku, a więc wektor przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ jest prostopadły do płaszczyzny rysunku.

Oś obrotu, a więc i przyspieszenie kąowe są prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zwrócone za płaszczyznę rysunku. Prostoliniowy ruch masy m odbywa się wzdłuż osi skierowanej zgodnie z wektorem $\vec{g}$. Ostatni układ równań wektorowych możemy zapisać w postaci układu równań skalarnych

$$\begin{cases} I\varepsilon = rN \\ ma = mg - N \end{cases} \quad (16)$$

Jeśli nić rozwija się bez poślizgu, możemy skorzystać z zależności pomiędzy przyspieszeniem kąowym ε oraz przyspieszeniem liniowym

$$\varepsilon = \frac{a}{r} \quad (17)$$

Masa m porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową $v(0) = 0$, a więc jej przyspieszenie

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (18)$$

Równania opisujące ruch przyjmują postać

$$\begin{cases} I\frac{2h}{rt^2} = rN \\ m\frac{2h}{t^2} = mg - N \end{cases} \quad (19)$$

Obliczając z pierwszego równania wartość siły naciągu N i wstawiając do drugiego, otrzymujemy równanie

$$m\frac{2h}{t^2} = mg - I\frac{2h}{r^2t^2} \quad (20)$$

Z ostatniego równania znajdziemy zależność czasu spadania masy m w funkcji momentu bezwładności układu

$$t^2 = \frac{2h}{g} + \frac{2h}{mgr^2}I \quad (21)$$

Moment bezwładności I układu (krzyżak wraz z czterema ciężarkami) równy jest sumie momentów krzyżaka I_0 i czterech ciężarków I_M

$$I = I_0 + I_M \quad (22)$$

Moment bezwładności czterech ciężarków I_M zgodnie z prawem Steinera jest równy

$$I_M = 4I_1 + 4MR^2 \quad (23)$$

gdzie I_1 jest momentem bezwładności ciężarka o masie M względem osi przechodzącej przez jego środek, R jest odległością środka ciężkości ciężarka od osi obrotu.

Zastępując odległość ciężarka R przez odległość d przeciwnych ciężarków $d = 2R$, obliczamy moment bezwładności krzyżaka z ciężarkami jako funkcję odległości d

$$I = \underbrace{I_0 + 4I_1}_{I_c} + Md^2 = I_c + Md^2 \quad (24)$$

gdzie $I_c = I_0 + 4I_1 = \text{const.}$

Po uwzględnieniu tych związków otrzymamy zależność czasu spadania t^2 w funkcji odległości pomiędzy środkami walców d^2

$$t^2 = \frac{2h}{g} \left(1 + \frac{I_c}{mr^2}\right) + \frac{2Mh}{mgr^2} d^2 \quad (25)$$

Jak widać zależność $t^2(d^2)$ jest zależnością liniową, a więc możemy zapisać

$$t^2 = B + Ad^2 \quad (26)$$

gdzie A, B oznaczają stałe. Stała B wynosi

$$B = \frac{2h}{g} \left(1 + \frac{I_c}{mr^2}\right) \quad (27)$$

i możemy ją wyznaczyć jako punkt przecięcia prostej $t^2(d^2)$ z osią zmiennych zależnych (t^2).

Stała

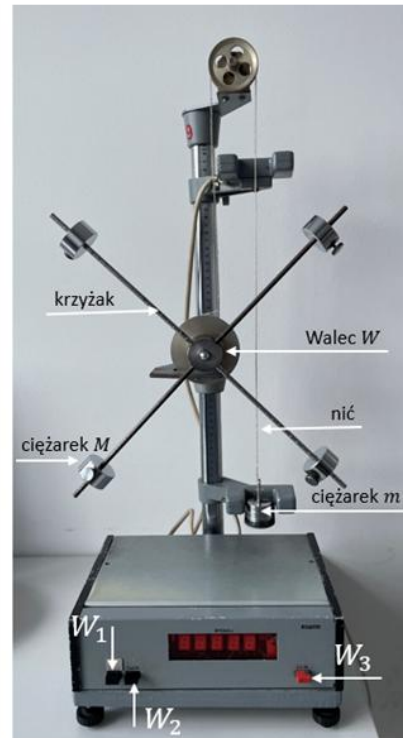
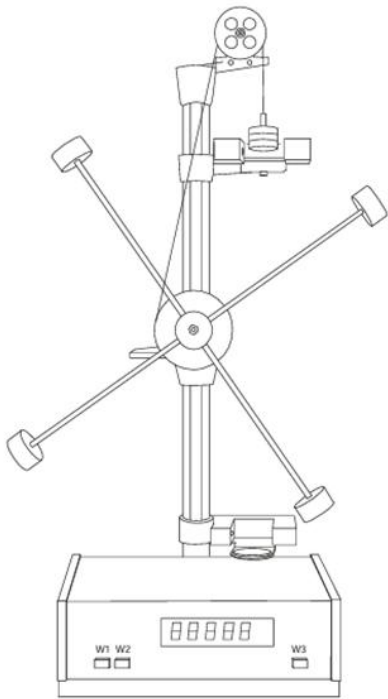
$$A = \frac{2Mh}{mgr^2} \quad (28)$$

jest tangensem kąta nachylenia prostej $t^2(d^2)$ do osi zmiennych niezależnych (d^2).

Aby wyznaczyć doświadczalną zależność $t^2(d^2)$ należy zmierzyć czas opadania t ciężarka o masie m dla różnych odległości d pomiędzy środkami mas ciężarków o masie M . Otrzymany wykres funkcji $t^2(d^2)$ powinien być linią prostą.



Metodologia wykonania pomiarów



1. Zmierzyć suwmiarką średnicę $2r_1$ szpulki bez nici, a następnie nawinąć nić tak, aby ciężarek m znalazł się w górnym położeniu i zmierzyć średnicę $2r_2$ szpuli wraz z nawiniętą nicią. Średnia arytmetyczna promienia $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ jest ramieniem siły naciągu nici.
2. Włączyć przyrząd przyciskiem W_3 .
3. Założyć (po uzgodnieniu z prowadzącym ćwiczenie) na końcu nici masę m i maksymalnie rozsunąć ciężarki o masie M na odległość d od siebie, zmierzyć $d = 2R$ między ich środkami.
4. Zmierzyć określoną wysokość opadania h .
5. Przenieść ciężarek o masie m w górne położenie (ponownie nawinąć nić).
6. Wcisnąć wyłącznik W_1 w celu wyzerowania wskazań miernika.
7. Wcisnąć wyłącznik W_2 i odczytać czas t opadania masy m .
8. Pomiary z punktów 5, 6, 7 powtórzyć 5 razy w celu oszacowania średniego czasu opadania.
9. Zmienić odległość d i powtórzyć pomiary zgodnie z punktami 5–8. Należy wykonać pomiary dla przynajmniej siedmiu różnych położzeń d ciężarków o masie M .



Obliczenia

1. Dla każdej odległości d ciężarków obliczyć d^2 , średni czas $\bar{t}$ oraz $\bar{t}^2$. Korzystając z uzyskanych danych sporządzić wykres zależności $t^2(d^2)$.
2. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki A i B prostej $t^2 = B + Ad^2$, przyjmując jako zmienną niezależną $x = d^2$, a zmienną zależną $y = t^2$.
Metoda pozwala także na obliczenie niepewności $u(A)$ i $u(B)$.
3. Wyznaczyć moment bezwładności I_c wykorzystując wyznaczoną wartość współczynnika B (wzór 27) oraz wyznaczyć masę walca M korzystając z wartości współczynnika A (wzór 28).
4. Dla każdej wartości d obliczyć moment bezwładności I wahadła Oberbecka (wzór 24).
5. Określić niepewność standardową wysokości $u(h)$ metodą typu B na podstawie wielkości działki elementarnej.
6. Oszacować niepewność standardową promienia szpuli $u(r)$ metodą typu B na podstawie zakresu zmian promienia $\Delta r = \frac{r_2 - r_1}{2}$.
7. Obliczyć metodą najmniejszych kwadratów niepewności standardowe wyznaczonych parametrów prostej $u(A)$ i $u(B)$.
8. Korzystając z prawa przenoszenia niepewności wyznaczyć niepewności momentu bezwładności I_c

$$u(I_c) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_c}{\partial h} u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_c}{\partial r} u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_c}{\partial B} u(B)\right)^2} \quad (29)$$

oraz masy M

$$u(M) = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial h} u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial r} u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial A} u(A)\right)^2} \quad (30)$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne.

10. Wyniki pomiarów (biała część tabeli) i obliczeń (szara część) umieścić w tabeli.
11. Porównać podaną masę walca M z masą wyznaczoną z doświadczenia. Zgodność tych mas świadczy o poprawności przyjętego założenia o liniowej zależności $t^2(d^2)$. Porównanie wykonujemy za pomocą metody opisanej w skrypcie Niepewności pomiarowe.

We wnioskach na początku zapisać poprawnie zaokrąglone ostateczne wyniki pomiarów I_c i M .



M [kg]	m [kg]	h [cm]	r_1, r_2 [cm]	d [cm]	d^2 [cm ²]	t [s]					$\bar{t}$ [s]	$\bar{t}^2$ [s ²]	I [kg · m ²]	$I_c \pm u(I_c)$ [kg · m ²]	$M \pm u(M)$ [kg]