

Pomiar momentu bezwładności koła Maxwella

Wymagania do ćwiczenia

1. Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej, moment bezwładności.
2. Energia kinetyczna w ruchu postępowym i obrotowym, energia potencjalna, zasada zachowania energii mechanicznej.

Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, tom 1, Warszawa 2003, PWN, str. 87–101, str. 168–189, str. 273-279
2. OpenStacks

Przykładowe pytania

1. Sformułuj I i II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego za pomocą wzoru – wyjaśnij oznaczenia.
2. Sformułuj I i II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego za pomocą wzoru – wyjaśnij oznaczenia.
3. Co to jest bryła sztywna?
4. Wyjaśnij co jest przyczyną ruchu postępowego.
5. Wyjaśnij co jest przyczyną ruchu obrotowego.
6. Jak wyznaczamy moment bezwładności dla układu punktów materialnych.
7. Jak wyznaczamy moment bezwładności dla bryły o ciągłym rozkładzie materii.
8. Sformułuj prawo Steinera – wyjaśnij kiedy ma ono zastosowanie.
9. Jak obliczyć energię kinetyczną w ruchu postępowym? Podaj wzór, wyjaśnij oznaczenia.
10. Jak obliczyć energię kinetyczną w ruchu obrotowym? Podaj wzór, wyjaśnij oznaczenia.
11. Jak obliczamy energię potencjalną układu ciał? Podaj definicję energii potencjalnej. Jak można wyznaczyć energię potencjalną ciała w polu grawitacyjnym np. Ziemi w pobliżu jej powierzchni.
12. Sformułuj zasadę zachowania energii mechanicznej.
13. Co to jest koło Maxwella?
14. Jaka jest dokładność stopera ze wskazówką / stopera cyfrowego (na ogół).
15. Jak określamy dokładność pomiaru przyrządu z wyświetlaczem cyfrowym?
16. Czym jest suwmiarka i jaka jest zasada pomiaru z użyciem tego przyrządu?

Przyrządy pomiarowe

- Linijka (przymiar milimetrowy), suwmiarka.
- Gotowy zestaw do pomiaru czasu opadania koła Maxwella.

WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Dynamika bryły sztywnej

Dowolny ruch bryły sztywnej można potraktować jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego. Ruch postępowy środka masy opisuje II zasada dynamiki Newtona

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

gdzie $\vec{a}$ – przyspieszenie środka masy bryły sztywnej, $\sum_i \vec{F}_i$ – suma sił działających na bryłę sztywną.

Masa m jest wielkością jednoznacznie wyznaczoną dla danej bryły sztywnej.

Energia kinetyczna bryły sztywnej poruszającej się ruchem postępowym

$$E_{kp} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Energia kinetyczna punktu materialnego o masie m poruszającego się po okręgu

$$E_{ko} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

gdzie: ω – prędkość kątowna, r - promień okręgu. Jeśli wokół danej osi obrotu obraca się zbiór punktów materialnych, to energia kinetyczna

$$E_{ko} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i\omega^2r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^N m_ir_i^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Wielkość $I = \sum_{i=1}^N m_ir_i^2$, jest momentem bezwładności układu N punktów materialnych względem danej osi obrotu. Dla bryły sztywnej, $m_i \rightarrow 0$, moment bezwładności

$$I = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} m_ir_i^2 = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

gdzie ρ – gęstość bryły sztywnej. Moment bezwładności bryły sztywnej zależy od rozmiarów bryły, jej kształtu i od wyboru osi obrotu.

Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół nieruchomej osi obrotu opisuje II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

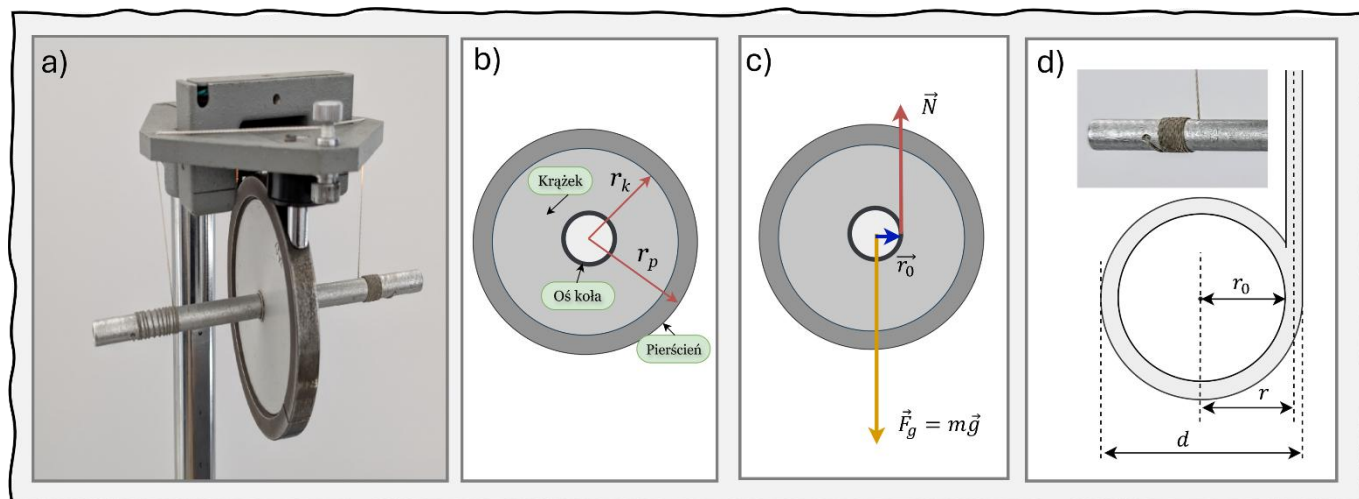
$$I\vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i,$$

gdzie: $\vec{\varepsilon}$ – przyspieszenie kątowe bryły sztywnej, $\vec{M}_i$ – moment siły $\vec{F}_i$. Ramiona sił $\vec{r}_i$ są wektorami poprowadzonymi od osi obrotu do punktu przyłożenia siły $\vec{F}_i$.



Wyznaczenie momentu bezwładności koła Maxwella na podstawie doświadczenia

Wahadło (koło) Maxwella jest bryłą sztywną składającą się z krążka o promieniu r_k , pierścienia o promieniu r_p zamocowanych na osi o średnicy d ($d \ll r_k$ i $d \ll r_p$). Suma mas wszystkich trzech elementów jest równa m . Całość jest zawieszona na dwóch niciach nawiniętych na oś wahadła. Na wahadło działają siły: grawitacji i naciągu nici. Ruch postępowy wahadła odbywa się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = m\vec{g} - 2\vec{N}$, ruch obrotowy pod wpływem momentu sił naciągu nici $\vec{M} = 2\vec{r} \times \vec{N}$.



Rys. 1 a) Koło Maxwella zamocowane w górnym położeniu, po prawej stronie prawidłowo/równo nawinięta nić, po lewej stronie źle nawinięta nić, b) krążek z zaznaczonymi promieniami: pierścienia i krążka, c) rozkład sił działających na oś koła Maxwella - $\vec{r}_0$ - ramię działania siły naciągu nici, d) w powiększeniu oś koła Maxwella: d – średnica osi koła wraz z nawiniętą nicią, r – ramię działania siły naciągu nici, r_0 – promień osi koła Maxwella bez nici.

Rozważmy kolejne etapy ruchu wahadła. Jeśli wahadło znajduje się w najniższym punkcie, nici są całkowicie rozwinięte i wahadło pozostaje w spoczynku. Zakładamy, że energia potencjalna wahadła w tym położeniu jest równa zero. Następnie na oś nawijamy nić w wyniku czego środek masy podnosi się do góry na wysokość h i pozostaje w spoczynku. Jego całkowita energia mechaniczna jest wówczas równa energii potencjalnej

$$E_p = mgh$$

Następnie, uwolnione wahadło opada i w najniższym położeniu jego środek masy osiąga największą prędkość v . W punkcie tym jego całkowita energia mechaniczna jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy $\frac{mv^2}{2}$ i energii kinetycznej ruchu obrotowego $\frac{I\omega^2}{2}$ wahadła

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Moment bezwładności wahadła I jest liczony względem osi obrotu przechodzącej przez jego środek masy. Nić nawijamy na oś wahadła tak by nie nachodziła na siebie. Oznacza to, że ramiona sił naciągu powodujące obrót wahadła ze względu na skończoną grubość nici są różne od promienia r_0 osi walca ($r > r_0$, Rys. 1d). Zakładamy, że siły naciągu działają wzdłuż osi symetrii nici. W związku z tym mierzymy średnicę d osi wahadła z nawiniętą nicią. Zauważmy, że

$$r_0 + \left(\frac{d}{2} - r\right) = r,$$

z czego wynika, że

$$r = \frac{\frac{d}{2} + r_0}{2}.$$

Jeśli zaniedbamy siły oporu, to możemy zapisać zasadę zachowania energii mechanicznej w postaci

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Z ostatniego równania wyznaczmy moment bezwładności

$$I = (2mgh - mv^2) \frac{1}{\omega^2} = (2mgh - mv^2) \frac{r^2}{v^2} = mr^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1 \right),$$

gdzie wykorzystaliśmy związek pomiędzy prędkością liniową środka masy wahadła (równą prędkości liniowej punktów leżących na obwodzie) a prędkością kątową $v = r\omega$. Aby wyznaczyć moment bezwładności musimy obliczyć jeszcze prędkość środka masy wahadła v . Ruch prostoliniowy środka masy wahadła spowodowany jest stałą siłą wypadkową – jest więc ruchem jednostajnie przyspieszonym, z prędkością początkową $v(0) = 0$. Mamy zatem

$$h = \frac{at^2}{2},$$

zaś prędkość końcowa

$$v = at.$$

Eliminując przyspieszenie a z tych zależności otrzymujemy wyrażenie na końcową prędkość wahadła

$$v = \frac{2h}{t}.$$

Ostatecznie wyrażenie na moment bezwładności wahadła Maxwella przyjmuje postać

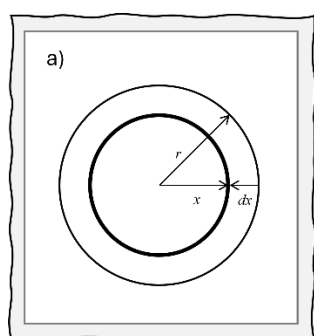
$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

Wyznaczenie momentu bezwładności wahadła Maxwella względem osi przechodzącej przez środek masy, wymaga pomiaru czasu t opadania wahadła z zadanej wysokości h .



Obliczenie momentu bezwładności wahadła Maxwella na podstawie definicji

Moment bezwładności wahadła Maxwella możemy obliczyć korzystając z definicji momentu bezwładności, sumując momenty bezwładności poszczególnych jego elementów, którymi są: oś o masie m_0 i promieniu r_0 , osadzony na niej krążek o masie m_k , promieniu wewnętrznym r_0 i zewnętrznym r_k oraz wymienialny pierścień o masie m_p , promieniu wewnętrznym r_k i zewnętrznym r_p .



Obliczymy moment bezwładności osi wahadła względem osi obrotu przechodzącej przez środek. Różniczkowy element masy dm wybierzemy w postaci cienkościennej rury o promieniu x , grubości dx i długości l . Masa tego elementu

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi x l dx$$

i moment bezwładności

$$I_0 = \int x^2 dm = \int_0^{r_0} 2\pi \rho l x^3 dx = 2\pi \rho l \frac{x^4}{4} \Big|_0^{r_0} = \pi \rho l \frac{r_0^4}{2} = \frac{m_0 r_0^2}{2}$$

Moment bezwładności krążka o masie m_k i grubości a wyznaczymy w taki sposób jak moment bezwładności osi, zmieniając granice całkowania:

$$\begin{aligned} I_k &= \int x^2 dm = \int_{r_0}^{r_k} 2\pi \rho a x^3 dx = 2\pi \rho a \frac{x^4}{4} \Big|_{r_0}^{r_k} = \pi \rho a \frac{r_k^4}{2} - \pi \rho a \frac{r_0^4}{2} = \\ &= \frac{\pi \rho a}{2} (r_k^4 - r_0^4) = \underbrace{\pi \rho a (r_k^2 - r_0^2)}_{m_k} \frac{(r_k^2 + r_0^2)}{2} \end{aligned}$$

a więc jego moment bezwładności

$$I_k = \frac{m_k}{2} (r_k^2 + r_0^2).$$

Moment bezwładności pierścienia

$$I_p = \frac{m_p}{2} (r_p^2 + r_k^2).$$

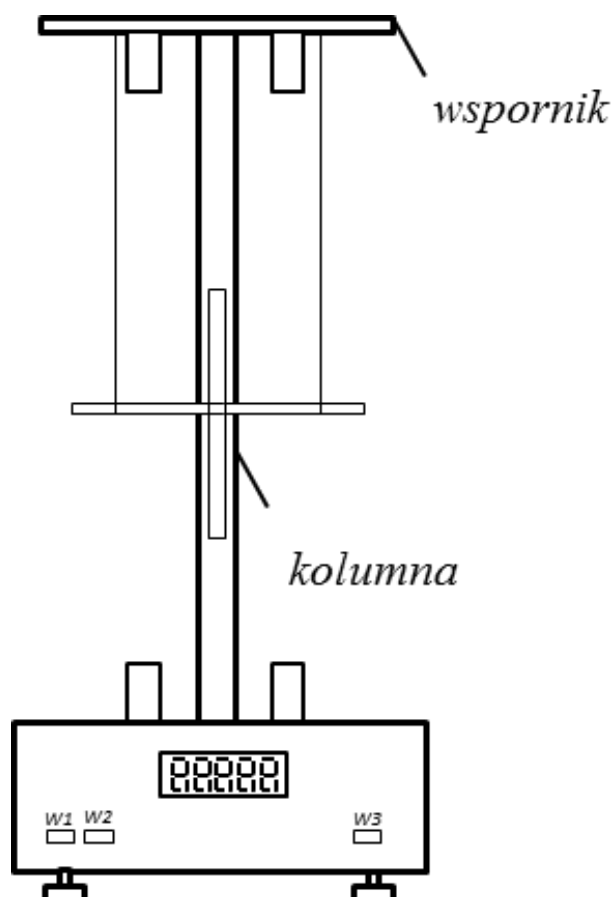
Całkowity moment bezwładności

$$I_t = I_0 + I_k + I_p,$$

$$I_t = \frac{1}{2} m_0 r_0^2 + \frac{1}{2} m_k (r_k^2 + r_0^2) + \frac{1}{2} m_p (r_p^2 + r_k^2).$$



Metodologia wykonywania pomiarów



1. Zmierzyć: średnicę osi wahadła $2r_0$, średnicę zewnętrzną krążka $2r_k$, średnicę zewnętrzną pierścienia $2r_p$, oraz średnicę osi wraz z nawiniętą nicią d z dokładnością do $\pm 0,1$ mm. Zmierzyć wysokość h z której opada koło Maxwella z dokładnością do ± 1 mm.
2. Odczytać wartości mas osi wahadła m_0 , masę krążka m_k , oraz masę pierścienia m_p „wybite” na odpowiednich elementach i wpisać do tabeli. Włączyć przyrząd przyciskiem W3.
3. Na krążek wahadła nałożyć dowolnie wybrany pierścień dociskając go do oporu.
4. Nawinąć na oś wahadła nić i unieruchomić je przy pomocy elektromagnesu (przycisk W2 wyciśnięty).
5. Sprawdzić, czy dolna krawędź pierścienia pokrywa się z zerem skali naniesionej na kolumnę. W przypadku, gdy nie został spełniony powyższy warunek, odkręcić wspornik górny i wyregulować wysokość jego ustawienia.
6. Nacisnąć przełącznik W1 w celu wyzerowania zegara i wcisnąć przełącznik W2 celem uwolnienia wahadła.
7. Odczytać zmierzoną wartość czasu spadania wahadła i zapisać w tabeli.
8. Pomiar czasu wykonać co najmniej 10 razy. Wyznaczyć wartość średnią czasu spadania.
9. Pomiary powtórzyć dla pozostałych pierścieni.
10. Wyniki pomiarów wpisać do tabeli pomiarowej.



Tabela pomiarowa

Wielkości mierzone									Wielkości obliczane		
m_0	m_k	m_p	d	r_0	$2r_k$	$2r_p$	h	t	r	$I_d \pm u(I_d)$	$I_t \pm u(I_t)$
[g]	[g]	[g]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[s]	[mm]	[kgm ²]	[kgm ²]



Obliczenia

1. Dla zmierzonych średnic: $2r_0, 2r_k, 2r_p, d$ wyliczyć niepewność standardową typu B.
2. Obliczyć promienie poszczególnych elementów: r_0, r_k, r_p a następnie niepewności $u(r_0), u(r_k), u(r_p)$ z prawa przenoszenia niepewności.
3. Obliczyć niepewność standardową wielkości złożonej $u(r)$.

$$u(r) = \sqrt{\left| \frac{\partial r}{\partial d} u(d) \right|^2 + \left| \frac{\partial r}{\partial r_0} u(r_0) \right|^2}$$

4. Obliczyć niepewność $u(t)$ metodą typu A.
5. Obliczyć moment bezwładności układu dla każdego zamontowanego pierścienia dwoma metodami:
 - a. I_d - dla wyników doświadczalnych (wzór wyprowadzony z zasady zachowania energii)
 - b. I_t - policzyć teoretyczny moment bezwładności na podstawie wymiarów geometrycznych odpowiednich brył.
6. Obliczyć niepewności standardowe $u(I_d)$ i $u(I_t)$ z prawa przenoszenia niepewności.

$$u(I_d) = \sqrt{\left| \frac{\partial I_d}{\partial r} u(r) \right|^2 + \left| \frac{\partial I_d}{\partial t} u(t) \right|^2 + \left| \frac{\partial I_d}{\partial h} u(h) \right|^2}$$

$$u(I_t) = \sqrt{\left| \frac{\partial I_t}{\partial r_0} u(r_0) \right|^2 + \left| \frac{\partial I_t}{\partial r_p} u(r_p) \right|^2 + \left| \frac{\partial I_t}{\partial r_k} u(r_k) \right|^2}$$