

Wyznaczanie wartości $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ dla powietrza, metodą Clementa-Desormesa

Wymagania do ćwiczenia

1. Ciepło właściwe gazu. Definicja C_p i C_v .
2. Przemiany gazowe.
3. Przemiana adiabatyczna gazu doskonałego – równanie Poissona.
4. Rodzaje cykli termodynamicznych.

Literatura

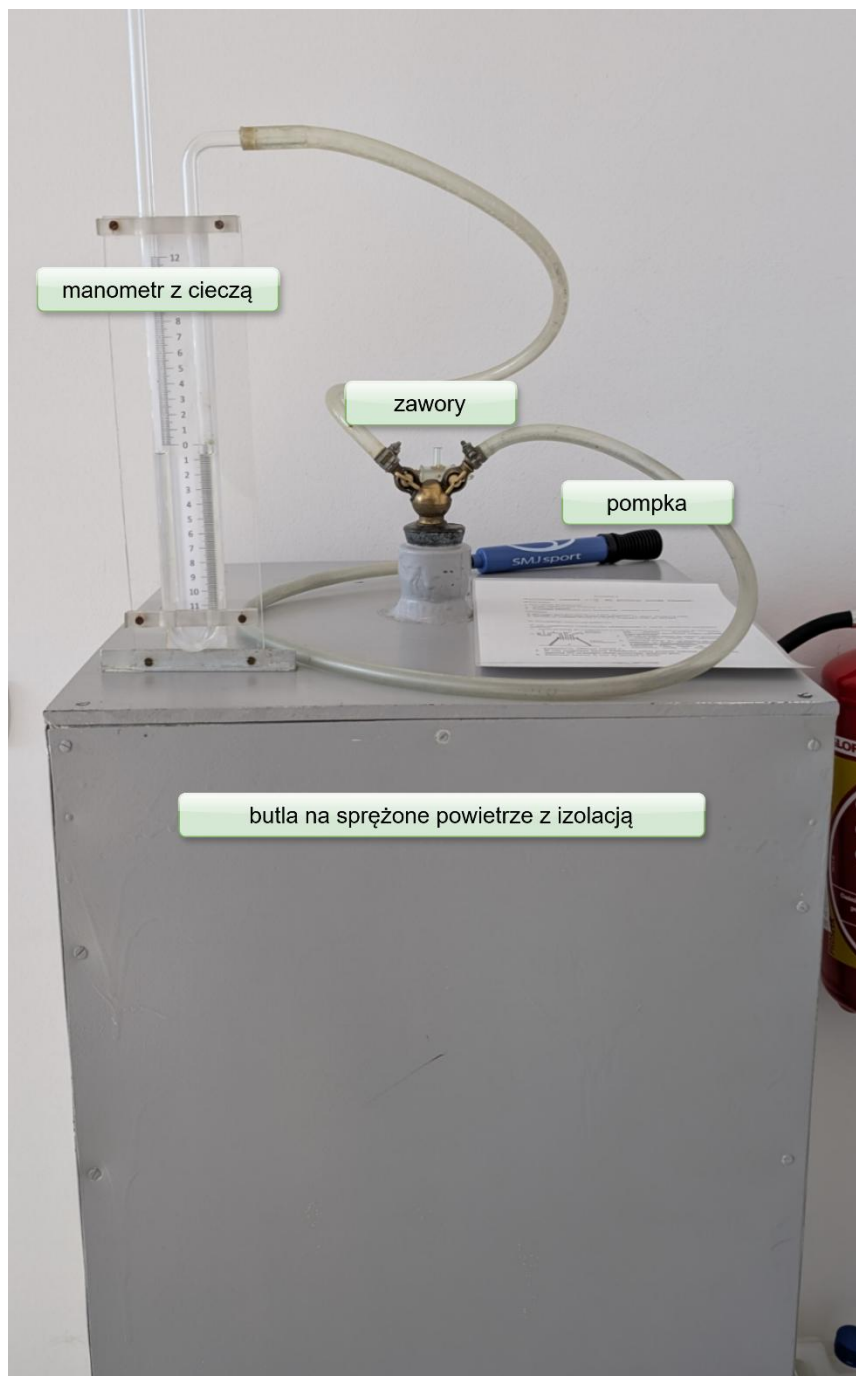
1. B. Jaworski i inni, Kurs Fizyki t.1, PWN, Warszawa
2. J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, t.1, WNT, Warszawa 1980
3. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, t. I, PWN, Warszawa 1966, str. 607-667
4. OpenStaks, Termodynamika 3.6

Przykładowe pytania

1. Dlaczego po sprężeniu gazu za pomocą pompki należy odczekać kilka minut zanim przystąpi się do odczytu wartości h_1 ?
2. Dlaczego po otwarciu kurka K_1 należy poczekać kilka minut zanim przystąpi się do odczytu wartości h_2 ?
3. Czym różni się sprężanie od kompresji?
4. Jakim przemianom podlega gaz w naczyniu na poszczególnych etapach pomiaru? Jak zmieniają się wartości: temperatury, ciśnienia, objętości i gęstości gazu w naczyniu na każdym z etapów wykonywanego ćwiczenia?
5. Z jakim rodzajem cyklu termodynamicznego mamy do czynienia w wykonywanym ćwiczeniu?
6. Dlaczego ogrzanie danej masy gazu o jednostkową wartość temperatury w przemianie izobarycznej wymaga większej ilości dostarczonego ciepła, niż analogiczne ogrzanie takiej samej masy gazu w przemianie izochorycznej?

Stanowisko pomiarowe / Przyrządy pomiarowe

Butla z powietrzem, pompka tłocząca, manometr z cieczą manometryczną (woda).



WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA

Ciepło jest formą energii, która może być przekazywana ciału o niższej temperaturze przez ciało o wyższej temperaturze. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania masy m o ΔT jest równa:

$$Q = m c \Delta T$$

gdzie c jest ciepłem właściwym zależnym od rodzaju materiału i temperatury, ΔT przyrostem temperatury wyrażonej w skali Kelvina.

Stosunek ilości ciepła ΔQ do odpowiadającego jej przyrostu temperatury nazywamy pojemnością cieplną C

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Pojemność cieplna przypadająca na jednostkę masy ciała nazywa się średnim ciepłem właściwym c :

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}$$

w przedziale temperatur ΔT .

Ciepło właściwie jest ilością ciepła dostarczonego do jednostki masy ciała, aby uzyskać jednostkowy przyrost temperatury. Dla nieskończenie małego przyrostu temperatury dQ , ciepło właściwe można zapisać w postaci:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

Wobec tego ilość dostarczonego ciepła zapisać można jako:

$$dQ = m c dT, \quad \rightarrow \quad Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT$$

Ciepło właściwe może osiągać różne wartości również w zależności od warunków w jakich ciepło jest dostarczane do gazu. Dla gazów ogrzewanych w stałej objętości ciepło właściwe c_V ma mniejszą wartość niż ciepło właściwe gazu ogrzewanego pod stałym ciśnieniem c_p .

Pierwsza zasada termodynamiki mówi, że ciepło dostarczone do układu idzie na wzrost jego energii wewnętrznej oraz na pracę jaką układ wykonuje nad otoczeniem:

$$\delta Q = dU + \delta W.$$

W przemianie izochorycznej ($V = \text{const}$) dostarczone ciepło idzie tylko na zmianę energii wewnętrznej gazu.

Praca wykonana przez gaz $\delta W = p dV = 0$. A więc zmiana energii wewnętrznej gazu

$$dU = \delta Q = m c_V dT,$$

gdzie c_V jest ciepłem właściwym przy stałej objętości.

Ponieważ energia wewnętrzna U jest zależna tylko od parametrów stanu gazu p, V, T (jest funkcją stanu gazu), to powyższy wzór, chociaż wyprowadzony w przemianie izochorycznej, obowiązuje dla każdej przemiany.

W przemianie izobarycznej ($p = \text{const}$) dostarczone ciepło idzie nie tylko na zmianę energii wewnętrznej, ale również na wykonanie pracy. Wtedy I zasadę termodynamiki $Q = dU + \delta W$ zapisujemy w postaci:

$$m c_p dT = m c_v dT + p dV.$$

Z równania stanu gazu doskonałego $p dV = n R dT$ otrzymamy, że:

$$p dV = \frac{m}{\mu} R dT,$$

Gdzie n jest liczbą moli, μ jest masą cząsteczkową gazu, zaś R uniwersalną stałą gazową.

Łącząc te dwie zależności ze sobą otrzymamy:

$$m c_p dT = m c_v dT + \frac{m}{\mu} R dT \quad \rightarrow \quad c_p = c_v + \frac{R}{\mu}$$

Ponieważ $\frac{R}{\mu} > 0$, to $c_p > c_v$. Wprowadzając ciepła molowe $C_p = \mu c_p$ oraz $C_v = \mu c_v$ otrzymamy

$$C_p = C_v + R.$$



Przemiana adiabatyczna

Przemiana adiabatyczna jest procesem, w którym nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem, zatem $\delta Q = 0$. Z I zasady termodynamiki $dU + \delta W = Q$, dla jednego mola gazu, otrzymamy równanie:

$$C_v dT + p dV = 0,$$

z którego wynika, że:

$$dT = -\frac{p}{C_v} dV$$

Różniczkując równanie stanu gazu doskonałego $pV = RT$ i wstawiając $C_p = C_v + R$, otrzymamy:

$$p dV + V dp = R dT \quad \rightarrow \quad p dV + V dp = -(C_p - C_v) \frac{p dV}{C_v} = -(\kappa - 1) p dV,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$.

Przekształcając to równanie i dzieląc przez pV otrzymamy:

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dV}{V} = 0.$$

Całkując to równanie dostajemy:

$$\ln p + \kappa \ln V = \text{const},$$

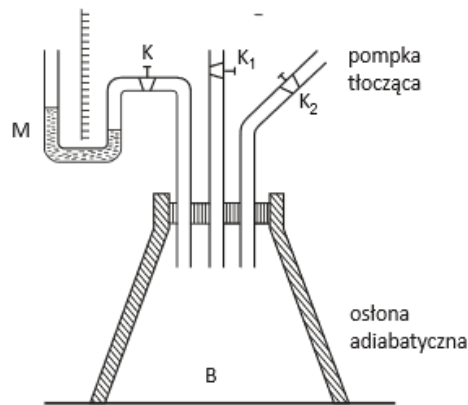
co jest równoważne równaniu:

$$pV^\kappa = \text{const}.$$

Jest to równanie adiabaty lub równanie Poissona.



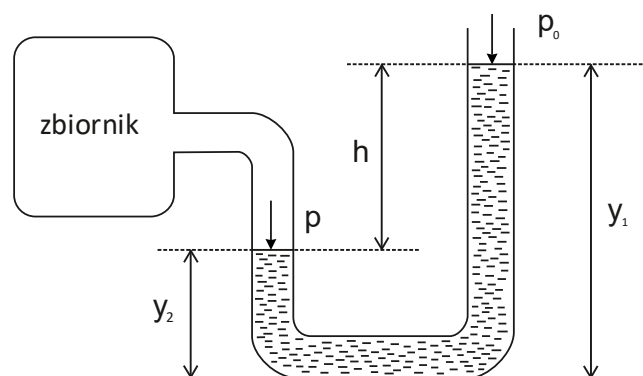
Metoda wyznaczenia wartości κ



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego do wyznaczania κ

W pomieszczeniu gdzie panuje stała temperatura oraz stałe ciśnienie, np. temperatura pokojowa $T_0 = \text{const}$ i ciśnienie atmosferyczne $p_0 = \text{const}$, znajduje się zamknięta butla B z powietrzem. Butla posiada objętość V . Przy butli znajduje się kurek K o dość dużym otworze. Całość jest połączona z pompką oraz manometrem M (rys.1). Kurek K_2 służy do odizolowania pompki od układu pomiarowego.

Manometr składa się z rurki o kształcie litery U zawierającej ciecz. Jeden koniec rurki jest połączony z otoczeniem, a drugi przymocowany do zbiornika, w którym mierzy się ciśnienie (rys. 2)



Rys.2. Sposób pomiaru ciśnienia: $h = y_1 - y_2$, p_0 – ciśnienie atmosferyczne, p – ciśnienie w zbiorniku oraz na głębokości h ramion U – rurki

Z warunku równowagi ciśnień

$$p = p_0 + p_h$$

p_h jest ciśnieniem hydrostatycznym wywieranym przez słup cieczy o wysokości h i wynosi:

$$p_h = \frac{Q_h}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho hSg}{S} = \rho hg \quad (1)$$

gdzie: Q_h – ciężar słupa cieczy o wysokości h ,

S – przekrój U-rurki,

V – objętość cieczy o masie m zawartej w rurce o przekroju S i długości h ,

ρ – gęstość lub masa właściwa cieczy,

g – przyspieszenie ziemskie,

stąd

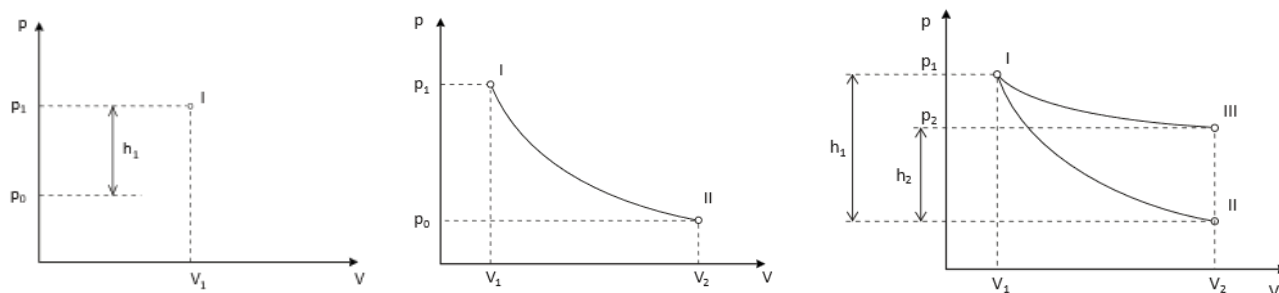
$$p = p_0 + \rho gh.$$

Ciśnienie w zbiorniku jest proporcjonalne do różnicy wysokości słupów cieczy w U-rurce.

Ciśnienie gazu w butli niech będzie nieco wyższe od ciśnienia zewnętrznego p_0 przy czym

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1.$$

Masa gazu w butli niech będzie równa m . W układzie współrzędnych: ciśnienie – objętość, stan początkowy gazu przedstawić można za pomocą punktu oznaczonego jako I (rys.3a).



Rys.3. Wykresy przemian, którym podlega powietrze wypełniające butlę podczas jednego cyklu procesu pomiarowego: a) stan początkowy po zwiększeniu ciśnienia powietrza w butli za pomocą pompki, a następnie obniżeniu temperatury tego powietrza do temperatury otoczenia, b) rozprężanie adiabatyczne powietrza w butli, c) przejście w stan końcowy po izochorycznym sprężeniu powietrza pozostałego w butli.

Jeżeli otworzymy kurek K_1 i zamkniemy go z chwilą zrównania się ciśnienia gazu w butli z ciśnieniem atmosferycznym, to powietrze rozpręży się adiabatycznie. Podczas szybkiego rozprężania gazu nie pobiera on ciepła z otoczenia i sam oziębi się do temperatury T_2 . Stan ten oznaczamy jako II. Objętość masy m gazy będzie teraz $V_2 > V_1$, ponieważ część gazu opuściła butlę. Zmiana masy gazu w butli jest do zaniedbania w porównaniu z masą początkową gazu. Przejście ze stanu I do II zaznaczamy na wykresie rys. 3b.

Do przejścia ze stanu I do II (przemiana adiabatyczna) można zastosować wzór Poissona:

$$(p_0 + \rho gh_1)V_1^\kappa = pV_2^\kappa \quad (2)$$

Po zamknięciu kurka gaz zaczyna się powoli ogrzewać i po pewnym czasie osiąga temperaturę otoczenia, przy czym wzrasta jego ciśnienie. Manometr wykazuje nadwyżkę ciśnienia ρgh_2 . Ten stan gazu oznaczamy

jako III. Parametry gazu w tym stanie: $V_2, T_o, p_2 = p_0 + \rho gh_2$. Porównując je z parametrami opisującymi stan gazu I: V_1, T_o , stwierdzamy, że możliwe było bezpośrednie przejście izotermiczne ze stanu I do III (rys 3c) zaznaczone linią przerywaną. Do przejścia izotermicznego ze stanu I do III stosujemy wzór Boyle'a-Mariotte'a:

$$(p_0 + \rho gh_1)V_1 = (p_0 + \rho gh_2)V_2 \quad (3)$$

Równania (2) i (3) tworzą układ równań z dwiema niewiadomymi. Z równania (2) obliczamy V_2 i podstawiamy do równania (3)

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{(p_0 + \rho gh_1)^{1/\kappa}}{p_0^{1/\kappa}} V_1 \\ v_2 &= \frac{(p_0 + \rho gh_1)^{1/\kappa}}{p_0^{1/\kappa}} V_1 \\ (p_0 + \rho gh_1)V_1 &= (p_0 + \rho gh_2) \frac{(p_0 + \rho gh_1)^{1/\kappa}}{p_0^{1/\kappa}} V_1 \\ (p_0 + \rho gh_1)V_1 &= (p_0 + \rho gh_2) \frac{(p_0 + \rho gh_1)^{1/\kappa}}{p_0^{1/\kappa}} V_1. \end{aligned}$$

Po uproszczeniu i zlogarytmowaniu otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{\ln \frac{p_0 + \rho gh_1}{p_0}}{\ln \frac{p_0 + \rho gh_1}{p_0 + \rho gh_2}} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0} \right) - \ln \left(1 + \frac{\rho gh_2}{p_0} \right)}$$

Rozwijając logarytmy w szereg potęgowy i uwzględniając warunki

$$\frac{\rho gh_1}{p_0} \ll 1, \quad \frac{\rho gh_2}{p_0} \ll 1,$$

możemy pozostawić jedynie pierwszy wyraz szeregu. Otrzymamy:

$$\ln \left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0} \right) = \frac{\rho gh_1}{p_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho gh_1}{p_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\rho gh_1}{p_0} \right)^3 + \dots \cong \frac{\rho gh_1}{p_0},$$

i analogicznie

$$\ln \left(1 + \frac{\rho gh_2}{p_0} \right) \cong \frac{\rho gh_2}{p_0}$$

Ostatecznie

$$\kappa = \frac{\frac{\rho gh_1}{p_0}}{\frac{\rho gh_1}{p_0} - \frac{\rho gh_2}{p_0}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (4)$$



Metoda średniej ważonej z estymacją niepewności wejściowych

Jedną z metod wyznaczania niepewności typu A, a więc metod statystycznych, jest metoda średniej ważonej. Zakładamy w niej, że dysponujemy zestawem zmierzonych lub obliczonych wartości x_i , gdzie $i = 1 \dots n$, które podlegają rozkładowi Gaussa. Każde x_i posiada niepewność $u(x_i)$.

Gdy niepewności $u(x_i)$ są **znane i takie same**, wartość prawdziwą (oczekiwaną) możemy estymować za pomocą średniej arytmetycznej wszystkich wartości x_i . Jeżeli jednak niepewności $u(x_i)$ są **znane ale różne**, to do oszacowania wartości prawdziwej i jej niepewności należy użyć metody średniej ważonej:

$$x_{\text{sr}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad u(x_{\text{sr}}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}},$$

gdzie wagi w_i oblicza się wzorem

$$w_i = \frac{1}{[u(x_i)]^2}. \quad (5)$$

Możliwy jest także inny przypadek, gdy niepewności $u(x_i)$ są **różne i na dodatek nieznane**, ale wszystkie pozostają w **znanych** stosunkach (np. wynikają z jednej niepewności), co można wyrazić następująco:

$$u(x_i) = \kappa_i \cdot u_o,$$

gdzie niepewność u_o jest nieznana, ale współczynniki κ_i są znane.

Wtedy niepewność u_o , zwaną niepewnością wejściową, można estymować za pomocą rozrzutu wielkości x_i , co prowadzi do następujących wzorów na wartość średnią i jej niepewność:

$$x_{\text{sr}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad u(x_{\text{sr}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [w_i (x_i - x_{\text{sr}})^2]}{(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n w_i}}, \quad (6)$$

gdzie niepewność u_o , służącą do obliczenia niepewności $u(x_i)$ i wag w_i , może być dowolna. Jak widać z powyższych wzorów, wagi w_i , a wraz z nimi niepewność u_o , występują zarówno w liczniku i mianowniku, więc niepewność u_o nie wpływa na wartości x_{sr} i $u(x_{\text{sr}})$ (skraca się).

Co rzadziej ale też może być przydatne, każdą z niepewności $u(x_i)$ można estymować jako:

$$\hat{u}(x_i) = u(x_i) \frac{u(x_{\text{sr}})}{u'(x_{\text{sr}})} = u(x_i) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [w_i (x_i - x_{\text{sr}})^2]}{(n-1)}}, \quad (7)$$

gdzie $u'(x_{\text{sr}})$ jest niepewnością obliczoną z użyciem zwyczajnej metody średniej ważonej.

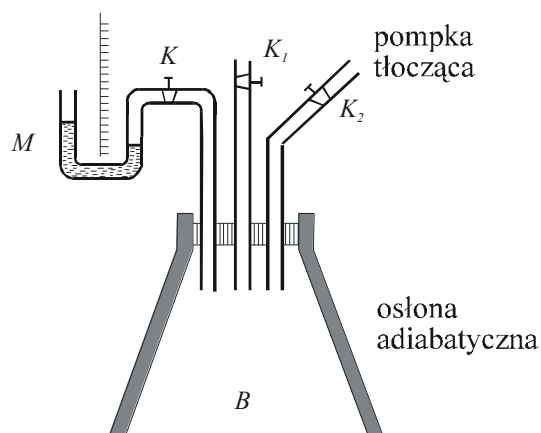
Metoda ta nazywa się metodą średniej ważonej z estymacją niepewności wejściowych. W sposób ścisły wyprowadza się ją ze statystycznej metody największej wiarygodności.



Metodologia wykonania ćwiczenia

W celu wyznaczenia współczynnika adiabatycznego κ należy wykonywać następujące czynności:

1. Zamknąć kurek K_1 i zagęszczać w butli powietrze za pomocą pompki do momentu, gdy różnica poziomów cieczy manometrycznej (barwionej wody) wyniesie kilka podziałek (kurek K otwarty). Zamknąć kurek K_2 .
2. Odczekać kilka minut, by różnica poziomów w manometrze ustaliła się, odczytać ją i oznaczyć jako h_1 .
3. Otworzyć kurek K_1 na krótko, ale tak, aby ciśnienie w butli zdażyło wyrównać się z ciśnieniem atmosferycznym.
4. Odczekać kilka minut, aż wskazania manometru ustalą się. Zapisać różnicę poziomów h_2 . Obliczyć wartość κ .
5. W celu osiągnięcia lepszej dokładności należy pomiary wykonać wielokrotnie (co najmniej 10), za każdym razem ponawiając dowolne sprężenie gazu.
6. Zmierzone wartości h_1 oraz h_2 umieścić w tabeli.



Opis czynności pomiarowych

1. W pierwszym etapie zamykamy kurek K_1 i tłoczmy gaz do pojemnika za pomocą pompki.
2. Po uzyskaniu w ten sposób wyraźnej różnicy poziomów cieczy w rurce manometru, zamykamy kurek K_2 i czekamy kilka minut obserwując wskazania manometru. W miarę upływu czasu różnica poziomów cieczy w ramionach U-rurki nieznacznie się zmniejsza, aż po upływie około dwóch minut nie dostrzegamy już jej zmniejszania. Odczytujemy wówczas różnicę poziomów cieczy i zapisujemy ją w tabeli jako h_1 .
3. Następnie otwieramy kurek K_1 , skutkiem czego poziom cieczy w obu ramionach U-rurki ulega szybkiemu wyrównaniu. Wtedy zamykamy kurek K_1 i ponownie czekamy około dwóch minut. W tym czasie obserwujemy stopniowy wzrost różnicy poziomów cieczy w ramionach U-rurki. Po około dwóch minutach różnica poziomów cieczy przestaje wyraźnie rosnać. Po tym czasie odczytujemy ją i zapisujemy w tabeli jako h_2 .
4. Od razu możemy zauważyć, że wartość h_2 jest mniejsza od h_1 .
5. Następnie tłoczmy ponownie gaz do naczynia za pomocą pompki, co stanowi początek drugiej serii pomiarowej. Osiągana podczas pompowania gazu różnica poziomów cieczy w manometrze nie powinna być zbyt duża, aby ciecz nie wylała się z manometru. W takiej sytuacji należy ją uzupełnić.
6. Czynności tu omówione powtarzamy wielokrotnie, aż do uzyskania dziesięciu serii pomiarowych. Wartości h_1 i h_2 będą następnie wstawione do równania (4), dzięki czemu znajdziemy przybliżoną wartość wykładnika adiabaty gazu, w tym przypadku powietrza.



Tabela pomiarowa

Wielkości mierzone		Wielkości obliczane		
h_1 [mm]	h_2 [mm]	$h_1 - h_2$ [mm]	κ	$\kappa_{sr} \pm u(\kappa_{sr})$



Obliczenia

1. Niepewności pomiarowe $u(h_1) = u(h_2) \equiv u(h)$ obliczyć metodą typu B.
2. Obliczyć wartość współczynnika adiabaty κ dla każdej pary wartości h_1, h_2 korzystając ze wzoru (4).
3. Niepewności $u(\kappa)$ dla każdego κ obliczyć metodą przenoszenia niepewności

$$u(\kappa) = \sqrt{\left[\frac{\partial \kappa}{\partial h_1} u(h)\right]^2 + \left[\frac{\partial \kappa}{\partial h_2} u(h)\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne.

Obliczyć κ_{sr} i $u(\kappa_{sr})$ metodą średniej ważonej z estymacją niepewności wejściowych wg. wzorów (5 i 6).

4. Porównać otrzymaną wartość z danymi tablicowymi za pomocą metody podanej w skrypcie Niepewności pomiarowe.

We wnioskach na początku zapisać poprawnie zaokrąglony wynik pomiarów.