

# Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego

## Wymagania do ćwiczenia

---

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Wahadło matematyczne i fizyczne.
3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

## Literatura

---

1. I.W. Sawieliew., Kurs fizyki, t. 1 PWN, Warszawa 1987 str. 222-226.
2. J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT, W-wa 2005, str.188-197.
3. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, t. 1, PWN Warszawa 1998, str. 248-256, 350-354.
4. M. Rossi, I. Zaninetti, The cubic period-distance relations for the Kater reversible pendulum, Central European Science Journals,3(4) 2005 636-659.
5. OpenStax

## Przykładowe pytania

---

1. Czym różni się wahadło matematyczne od fizycznego?
2. Omówić jakie siły działają na wahadło matematyczne?
3. Od czego zależy okres drgań wahadła matematycznego?
4. Jaki jest wpływ podwojenia długości wahadła na okres drgań?
5. Podać zależność wychylenia od czasu w ruchu harmonicznym.
6. Co to jest moment kierujący wahadła fizycznego i jakim wzorem go wyrażamy.
7. Podać drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego i wyjaśnić oznaczenia.
8. Co to jest długość zredukowana wahadła.
9. Podać równanie ruchu harmonicznego / np. dla ciała zawieszonego na sprężynie.

## Przyrządy pomiarowe

---

1. Gotowy przyrząd - zestaw pomiarowy do wyznaczania okresu drgań wahadła rewersyjnego.

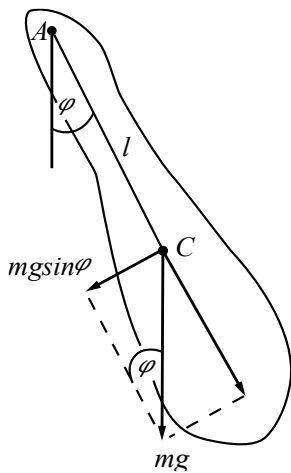
# WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



## Wahadło fizyczne

Zarówno wahadło matematyczne jak i fizyczne wykonują ruch drgający pod wpływem siły kwazisprężystej, tj. składowej siły ciężkości.

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna mogąca wykonywać obroty dookoła poziomej osi przechodzącej przez



Rys. 1. Wahadło fizyczne

dowolny punkt tej bryły, poza jego środkiem ciężkości. Siłą działającą na wahadło jest siła ciężkości o wartości  $G = mg$  zaczepiona w środku masy C (Rys. 1). Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi na ciało działa moment siły ciężkości o wartości:

$$M = -lmg\sin\varphi \quad (1)$$

Gdzie  $l$  jest odległością od punktu zawieszenia do środka masy C. Kąt  $\varphi$  określa wychylenie wahadła z położenia równowagi. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej względem stałej osi, zależność pomiędzy wektorem momentu siły  $\vec{M}$  a wektorem przyspieszenia kątownego  $\vec{\varepsilon}$  ma postać:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \quad (2)$$

Gdzie  $I$  jest momentem bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez punkt zawieszenia A. Łącząc wzory (2) i (1) otrzymujemy równość:

$$I\varepsilon = -mgl\sin\varphi$$

Uwzględniając, że  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \sin\varphi = 0 \quad (3)$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu oscylatora anharmonicznego, które nie posiada rozwiązania analitycznego. Zauważmy, że dla małych wychyleń  $\sin\varphi \approx \varphi$ :

| $\varphi[^\circ]$ | $\varphi[rad]$ | $\sin\varphi$ |
|-------------------|----------------|---------------|
| 0                 | 0              | 0             |

|    |        |        |
|----|--------|--------|
| 2  | 0.0349 | 0.0349 |
| 5  | 0.0873 | 0.0872 |
| 10 | 0.1745 | 0.1736 |
| 15 | 0.2618 | 0.2558 |

Przy założeniu małych wychyleń otrzymamy równanie różniczkowe ruchu oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

gdzie  $\frac{mgl}{I} = \omega^2$  jest kwadratem częstości drgań tego wahadła.

Wprowadzając wielkość  $D = mgl$ , nazywaną momentem kierującym wahadła fizycznego mamy

$\omega^2 = \frac{D}{I}$ , a stąd okres drgań wahadła fizycznego dla małych wychyleń ma postać

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad \text{lub} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (5)$$

Okres wahadła fizycznego przyjęto zapisywać także w postaci:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (6)$$

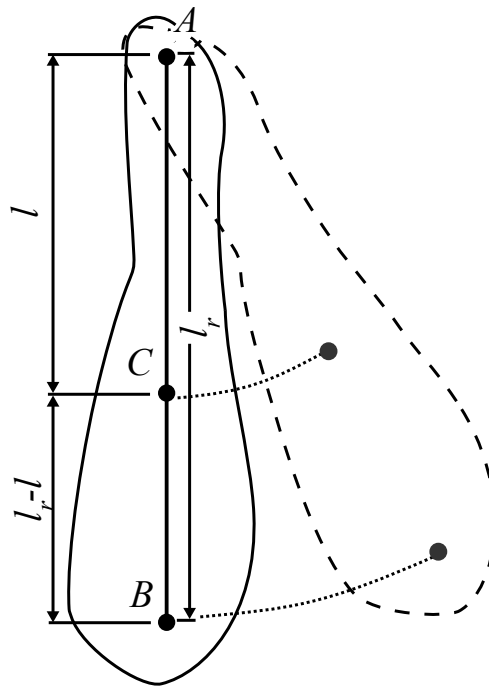
Gdzie  $l_r = \frac{I}{ml}$  i nosi nazwę *długości zredukowanej* wahadła fizycznego.

Na podstawie zależności (6) można powiedzieć, że długość zredukowana wahadła fizycznego jest to długość takiego wahadła matematycznego, którego okres jest równy okresowi drgań danego wahadła fizycznego.



## Wahadło rewersyjne

Jeżeli przez punkt A wahadła i środek masy C poprowadzimy prostą i na tej prostej z punktu A odłożymy odcinek równy długości zredukowanej  $l_r$ , to otrzymamy punkt B nazywany środkiem wahań wahadła fizycznego. Okres drgań wahadła fizycznego będzie miał taką samą wartość jeżeli oś obrotu umieścimy w środku wahań B.



Rys. 2. Wahadło rewersyjne, C – środek masy, B – środek wahań

Dowód tego twierdzenia jest następujący:

Dla wahań wokół osi przechodzącej przez punkt A,  $l_r \equiv \frac{I_A}{ml}$ , gdzie  $I_A$  jest momentem bezwładności wahadła względem tej osi. Zgodnie z twierdzeniem Steinera możemy tę równość zapisać w postaci:

$$l_r = \frac{I_C + ml^2}{ml} = \frac{I_C}{ml} + l \quad (7)$$

skąd wynika, że

$$(l_r - l)m = \frac{I_C}{l} \quad (7^*)$$

gdzie  $I_C$  jest momentem bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek masy C.

Dla osi obrotu przechodzącej przez środek wahań B:

$$l_r' \equiv \frac{I_B}{m(l_r - l)} = \frac{I_C + m(l_r - l)^2}{m(l_r - l)} = \frac{I_C}{m(l_r - l)} + (l_r - l) \quad (8)$$

gdzie  $I_B$  jest momentem bezwładności względem osi B.

Wstawiając (7\*) do (8) otrzymujemy:

$$l_r' = l + \frac{I_C}{ml} = l_r$$

z czego wynika, że  $T_A = T_B$ , co było do udowodnienia.

Wykorzystywane w ćwiczeniu wahadło jest metalowym prętem zaopatrzonym w dwa pryzmaty, wzajemnie równoległe, zwrócone do siebie wierzchołkami, w ustalonej od siebie odległości. Na pręcie umieszczone są masy  $m_1$  i  $m_2$  w kształcie dwuwypukłych soczewek celem minimalizacji oporu powietrza. Masa  $m_1$  jest zamocowana na stałe, masę  $m_2$  można przesuwając wzdłuż pręta między ostrzami, zmieniając w ten sposób położenie środka masy C wahadła, a co za tym idzie wartość momentów kierujących i okresów przy drganiach wahadła względem odpowiednio osi A i B.

**Dla określonego położenia masy  $m_2$ , które trzeba znaleźć doświadczalnie, wahadło to staje się wahadłem rewersyjnym czyli odległość  $l$  między osiami A i B staje się długością zredukowaną  $l_r$ .**

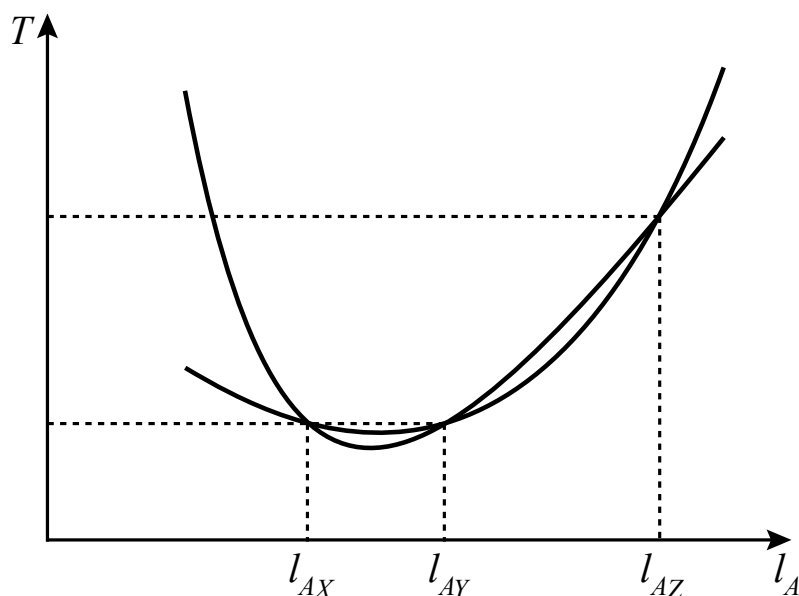
Rys. 3. Wahadło rewersyjne, układ pomiarowy

Mierzając okresy drgań wahadła  $T_A$  i  $T_B$  względem osi A i B dla ustalonych położenia masy  $m_2$  na pręcie (np. w odległości  $l_A$  od osi A) otrzymamy dwa ciągi liczb  $T_{A1}, T_{A2}, T_{A3} \dots T_{An}$  oraz  $T_{B1}, T_{B2}, T_{B3} \dots T_{Bn}$  dla  $l_{A1}, l_{A2}, l_{A3} \dots l_{An}$ .

Można wykazać, że zależności okresów drgań wahadła  $T_A, T_B$  względem odpowiednio osi A i B w zależności od położenia  $l_A$  masy  $m_2$  względem osi A wyrażają się ogólnymi zależnościami trzeciego stopnia postaci:

$$\begin{aligned} D_A l_A^2 + E_A l_A + F_A &= T_A^2 + G_A l_A T_A^2 \\ D_B l_A^2 + E_B l_A + F_B &= T_B^2 + G_B l_A T_B^2 \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie współczynniki  $D_A, E_A, F_A, G_A, D_B, E_B, F_B, G_B$  są pewnymi stałymi zależnymi od wartości mas  $m_1$  i  $m_2$ , masy pręta, odległości między ostrzami wahadła, położenia masy  $m_1$ .



Rys. 4. Zależności okresu drgań wahadła  $T_A = f(l_A)$  i  $T_B = f(l_A)$  dla dwóch zawieszek – na ostrzu A i ostrzu B.

Graficzne przedstawienie  $T_A = f(l_A)$  oraz  $T_B = f(l_A)$  daje dwie krzywe, które w zakresie możliwych zmian położenia  $l_A$  masy ruchomej  $m_2$ , mogą się nie przecinać albo przecinać się w jednym, dwóch lub trzech punktach. W tym ostatnim przypadku jeden z punktów przecięcia nie ma sensu fizycznego (w położeniu  $l_{AZ}$ ). Z którą sytuacją mamy do czynienia zależy od położenia masy nieruchomej  $m_1$ .

Położenie masy  $m_1$  jest ustalone, i doświadczalnie tak dobrane, że krzywe  $T_A = f(l_A)$  i  $T_B = f(l_A)$  przecinają się w dwóch punktach  $l_{AX}$  i  $l_{AY}$  w zakresie

możliwych zmian położenia  $l_A$  masy  $m_2$ . Dla położenia masy  $m_2$  w tych punktach wahadło jest wahadłem rewersyjnym, co należy sprawdzić doświadczalnie. Zazwyczaj odczytane z wykresu wartości okresów  $T_X$  dla położenia  $l_{AX}$ , oraz  $T_Y$  dla położenia  $l_{AY}$  nieznacznie różnią się od siebie (ze względu na błędy pomiarowe), chociaż powinny być identyczne. Z tego powodu do wyznaczenia  $g$  ze wzoru (6) należy postąpić się wartością średnią  $T = \frac{T_X + T_Y}{2}$ .

## WERSJA ĆWICZENIA: B

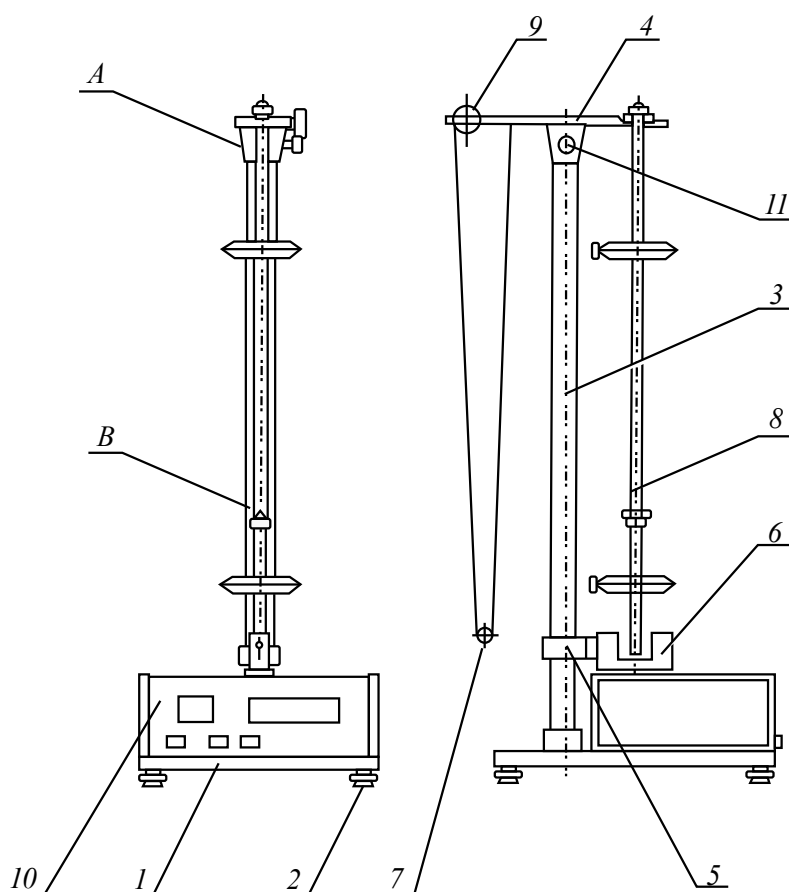


### B. Metodologia wykonania pomiarów

#### Opis przyrządu pomiarowego

Widok ogólny przyrządu pokazano na Rys. 4.

Podstawa (1) wyposażona jest w regulowane nóżki (2) umożliwiające wypoziomowanie przyrządu. W podstawie osadzona jest kolumna (3), na której zamocowano wspornik górny (4) i wspornik dolny (5) z czujnikiem fotoelektrycznym (6). Po poluzowaniu pokrętła (11) wspornik górny można obracać wokół kolumny. Dokręcenie pokrętła (11) unieruchamia wspornik w dowolnie wybranym położeniu. Z jednej strony



Rys. 5. Widok ogólny przyrządu

wspornika (4) umieszczono wahadło matematyczne (7), z drugiej na wmontowanych panewkach wahadło rewersyjne (8). Długość wahadła matematycznego można regulować przy pomocy pokrętła (9), a jej wartość odczytać na skali naniesionej na kolumnie (3). Na pręcie zostały co 10 mm wykonane pierścieniowe nacięcia służące do dokładnego ustalenia długości wahadła rewersyjnego (odległości między ostrzami). Ostrza i krążki można przemieszczać wzdłuż osi pręta i unieruchamiać w dowolnym położeniu. Elementy te zostały wykonane tak, że ich wymiar wzdłuż pręta jest krotnością 10 mm, a pokrętła mocujące umieszczono tak, by korzystając z pierścieniowych nacięć

można je było w sposób trwały zablokować. Wspornik dolny wraz z czujnikiem fotoelektrycznym można przemieszczać wzdłuż kolumny i unieruchamiać w dowolnie wybranym położeniu. Czujnik fotoelektryczny

połączony jest przykręconym do podstawy milisekundomierzem (10). Na płycie czołowej milisekundomierza znajdują się następujące przyciski:

- W1 (SIEĆ) — zasilanie urządzenia. Wciśnięcie klawisza powoduje włączenie napięcia zasilającego, sygnalizowane jest świeceniem żaróweczki czujnika fotoelektrycznego.
- W2 (ZER) — zerowanie miernika. Przyciśnięcie klawisza powoduje wyzerowanie układów milisekundomierza FPM-14 oraz wygenerowanie sygnału zezwolenia na pomiar.
- W3 (STOP) — zakończenie pomiaru. Przyciśnięcie klawisza powoduje wygenerowanie sygnału kończącego proces liczenia.

Na płycie tylnej milisekundomierza znajdują się gniazdo wejściowe służące do podłączenia współpracującego czujnika fotoelektrycznego ZL-1, zacisk uziemiający ZL-2.



## Przygotowanie do pomiarów

Aby przygotować przyrząd do pracy należy:

- sprawdzić czy czujnik fotoelektryczny jest podłączony do gniazda wejściowego milisekundomierza,
- skontrolować wypoziomowanie przyrządu,
- włączyć sznur sieciowy miernika do sieci zasilającej,
- wcisnąć przetątnik SIEĆ, kontrolując czy zaświeciła się żaróweczka czujnika fotoelektrycznego.

Przyrząd jest gotowy do pracy bezpośrednio po włączeniu napięcia sieciowego i nie wymaga czasu nagrzania.



## Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierzyć odległość  $l_r$  między ostrzami .
2. Ustawić masę  $m_1$  w położeniu wskazanym przez prowadzącego. Zawiesić wahadło w ten sposób, aby masa nieruchoma  $m_1$  znajdowała się u góry – zawieszenie A.
3. Umieścić wahadło rewersyjne nad czujnikiem fotoelektrycznym w taki sposób, aby pręt wahadła przecinał strumień światła padającego na fotokomórkę.
4. Zamocować ruchomą masę  $m_2$  w takim położeniu, aby jej środek znajdował się w odległości  $l_A = 2$  cm od górnego ostrza.
5. Wprawić wahadło w ruch, wychylając je o  $4-5^\circ$  od położenia równowagi.
6. Po naliczeniu przez miernik 9 okresów nacisnąć przycisk STOP. Zostanie zmierzony czas 10 wahaniec. Ten pierwszy pomiar  $t_{A1}$  powtórzyć trzykrotnie. Kolejny pomiar rozpoczynamy przez wciśnięcie przycisku ZER. Nie ma konieczności zatrzymywania i ponownego wprawienia w ruch wahadła.
7. Odwrócić wahadło o  $180^\circ$  (zawieszenie B), analogicznie jak w punkcie poprzednim zmierzyć czas 10 wahaniec. Ten pierwszy pomiar  $t_{B1}$  powtórzyć trzykrotnie.
8. Przesunąć masę  $m_2$  o 1 cm (oddalając ją od soczewki nieruchomej), zmierzyć czas 10 wahaniec.
9. Odwrócić wahadło i zmierzyć czas 10 wahaniec.
10. Postępując podobnie jak w punktach 5÷9 wyznaczyć czasy trwania 10 wahaniec względem osi A i B dla dalszych położen  $l_A$ .
11. Obracając wspornik górny umieścić nad czujnikiem wahadło matematyczne.
12. Kręcąc pokrętką na wsporniku górnym ustalić długość wahadła matematycznego równą odległości  $l_r$  między ostrzami A i B (długości zredukowanej) wahadła rewersyjnego. Zwrócić uwagę na to, by ryska na kulce była przedłużeniem ryski na korpusie czujnika fotoelektrycznego.
13. Wprowadzić wahadło matematyczne w ruch odchylając kulkę o  $4-5^\circ$  od położenia spoczynkowego
14. Zmierzyć czas  $t$  trwania 10 wahaniec wahadła matematycznego. W tym celu po wykonaniu kilku wahaniec nacisnąć przycisk ZER. Po naliczeniu przez miernik 9 okresów nacisnąć klawisz STOP. Pomiar powtórzyć trzy razy.





### Tabela pomiarowa dla wahadła rewersyjnego

| $l_{An}$<br>[m] | $t_{An}$<br>[s] | $T_{An}$<br>[s] | $t_{Bn}$<br>[s] | $T_{Bn}$<br>[s] | $l_r$<br>[m] | $T_{sr}$<br>[s] | $g \pm u(g)$<br>[m/s <sup>2</sup> ] |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------------------------------|
|                 |                 |                 |                 |                 |              |                 |                                     |



### Tabela pomiarowa dla wahadła matematycznego

| $l$<br>[m] | $t$<br>[s] | $t_{sr}$<br>[s] | $T$<br>[s] | $g \pm u(g)$<br>[m/s <sup>2</sup> ] |
|------------|------------|-----------------|------------|-------------------------------------|
|            |            |                 |            |                                     |



### Obliczenia

- Dla pierwszego położenia  $l_{A1}$  masy ruchomej  $m_2$  obliczyć średnie czasy  $t_{A1sr}$ ,  $t_{B1sr}$  trwania 10 wahaní wahadła wykonującego drgania względem odpowiednio osi A i B. Obliczyć niepewność  $u(t_A)$  i  $u(t_B)$  jako niepewność pojedynczego pomiaru, np.  $u(t_A) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (t_{A1i} - t_{A1sr})^2}$ .
- Na podstawie czasów  $t_{An}$ ,  $t_{Bn}$  obliczyć okresy  $T_{An}$ ,  $T_{Bn}$  wahadła wykonującego drgania względem odpowiednio osi A i B dla poszczególnych położení masy ruchomej  $m_2$ .
- Oszacować niepewność  $u(l_A)$  metodą typu B, przyjmując:  $\Delta l = 1 \text{ mm}$ . Niepewności  $u(T_A)$ ,  $u(T_B)$  obliczyć z prawa przenoszenia niepewności  $u(T) = u(t)/10$ .
- Wykreślić zależności okresów  $T_A$  i  $T_B$  wahadła rewersyjnego od położení  $l_A$  masy ruchomej  $m_2$ . Na wykresach zaznaczyć niepewności  $u(T_A)$ ,  $u(T_B)$  i  $u(l_A)$ . UWAGA! Oś rzędnych, na której odkładamy wartości  $T_A$  i  $T_B$  maksymalnie rozciągnąć (oś odciętych nie musi przecinać osi rzędnych dla  $T = 0$ )!

5. Z wykresu odczytać wartości okresu drgań wahadła rewersyjnego  $T_X$  i  $T_Y$  odpowiadające punktom przecięcia krzywych  $T_A(l_A)$  i  $T_B(l_A)$  (Rys. 4). Obliczyć średnią arytmetyczną  $T_{sr} = \frac{T_X + T_Y}{2}$ .
6. Niepewność  $u(T_{sr})$  obliczyć z prawa przenoszenia niepewności

$$u(T_{sr}) = \sqrt{\left[\frac{\partial T_{sr}}{\partial T_X} u(T)\right]^2 + \left[\frac{\partial T_{sr}}{\partial T_Y} u(T)\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne. Obliczyć niepewność  $u'(T_{sr})$  metodą typu A

$$u'(T_{sr}) = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (2-1)} [(T_X - T_{sr})^2 + (T_Y - T_{sr})^2]}$$

Do dalszych obliczeń przyjąć większą z niepewności  $u(T_{sr})$  i  $u'(T_{sr})$ .

7. Obliczyć przyspieszenie ziemskie ze wzoru (6), wstawiając wartość średnią  $T_{sr}$ .
8. Niepewność przyspieszenia ziemskiego obliczyć z prawa przenoszenia niepewności.

$$u(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial l_r} u(l)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial T_{sr}} u(T_{sr})\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne.

9. Sprawdzić, czy obliczona wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$ , w granicach niepewności, pokrywa się z wartością tablicową oraz porównać okresy drgań wahadła rewersyjnego  $T_{sr}$  i matematycznego  $T$ , wcześniej obliczając niepewność  $u(T)$  metodą typu A. Obu tych porównań dokonać metodą podaną w skrypcie Niepewności pomiarowe.

We wnioskach na początku zapisać poprawnie zaokrąglony wynik pomiarów.