

Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego

Wymagania do ćwiczenia

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Wahadło matematyczne i fizyczne.
3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

Literatura

1. I.W. Sawieliew., Kurs fizyki, t. 1 PWN, Warszawa 1987 str. 222-226.
2. J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT, W-wa 2005, str.188-197.
3. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, t. 1, PWN Warszawa 1998, str. 248-256, 350-354.
4. M. Rossi, I. Zaninetti, The cubic period-distance relations for the Kater reversible pendulum, Central European Science Journals,3(4) 2005 636-659.
5. OpenStax

Przykładowe pytania

1. Czym różni się wahadło matematyczne od fizycznego?
2. Omówić jakie siły działają na wahadło matematyczne?
3. Od czego zależy okres drgań wahadła matematycznego?
4. Jaki jest wpływ podwojenia długości wahadła na okres drgań?
5. Podać zależność wychylenia od amplitudy w ruchu harmonicznym.
6. Co to jest moment kierujący wahadła fizycznego i jakim wzorem go wyrażamy?
7. Podać drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego i wyjaśnić oznaczenia.
8. Co to jest długość zredukowana wahadła fizycznego?
9. Podać równanie ruchu harmonicznego (np. dla ciała zawieszonego na sprężynie)
10. Czym wahadło rewersyjne różni się od wahadła fizycznego?
11. Czy przyrząd wykorzystywany w tym ćwiczeniu jest wahadłem rewersyjnym?

Przyrządy pomiarowe

1. Zestaw pomiarowy do wyznaczania okresu drgań wahadła rewersyjnego. Wahadło fizyczne (z którego można utworzyć wahadło rewersyjne)
2. Stoper



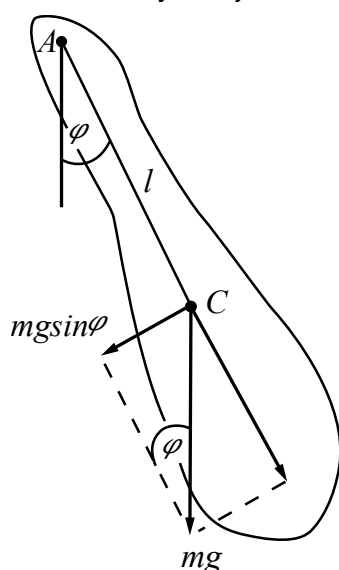
WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA



Wahadło fizyczne

Zarówno wahadło matematyczne jak i fizyczne wykonują ruch drgający pod wpływem siły kwazisprężystej, tj. składowej siły ciężkości.

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna mogąca wykonywać obroty dookoła poziomej osi przechodzącej przez



dowolny punkt tej bryły, poza jego środkiem ciężkości. Siłą działającą na wahadło jest siła ciężkości o wartości $G = mg$ zaczepiona w środku masy C (Rys. 1). Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi na ciało działa moment siły ciężkości o wartości:

$$M = -lmg\sin\varphi \quad (1)$$

Gdzie l jest odległością od punktu zawieszenia do środka masy C. Kąt φ określa wychylenie wahadła z położenia równowagi. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej względem stałej osi, zależność pomiędzy wektorem momentu siły $\vec{M}$ a wektorem przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ ma postać:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \quad (2)$$

Rys. 1. Wahadło fizyczne

Gdzie I jest momentem bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez punkt zawieszenia A. Łącząc wzory (2) i (1) otrzymujemy równość:

$$I\varepsilon = -mgl\sin\varphi$$

Uwzględniając, że $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \sin\varphi = 0 \quad (3)$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu oscylatora anharmonicznego, które nie posiada rozwiązania analitycznego. Zauważmy, że dla małych wychyleń $\sin\varphi \approx \varphi$:

$\varphi [^\circ]$	$\varphi [\text{rad}]$	$\sin\varphi$
0	0	0
2	0.0349	0.0349
5	0.0873	0.0872

10	0.1745	0.1736
15	0.2618	0.2558

Przy założeniu małych wychyleń otrzymamy równanie różniczkowe ruchu oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

gdzie $\frac{mgl}{I} = \omega^2$ jest kwadratem częstości drgań tego wahadła.

Wprowadzając wielkość $D = mgl$, nazywaną momentem kierującym wahadła fizycznego mamy

$\omega^2 = \frac{D}{I}$, a stąd okres drgań wahadła fizycznego dla małych wychyleń ma postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad \text{lub} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (5)$$

Okres wahadła fizycznego przyjęto zapisywać także w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (6)$$

Gdzie $l_r = \frac{I}{ml}$ i nosi nazwę *długości zredukowanej* wahadła fizycznego.

Na podstawie zależności (6) można powiedzieć, że długość zredukowana wahadła fizycznego jest to długość takiego wahadła matematycznego, którego okres jest równy okresowi drgań danego wahadła fizycznego.

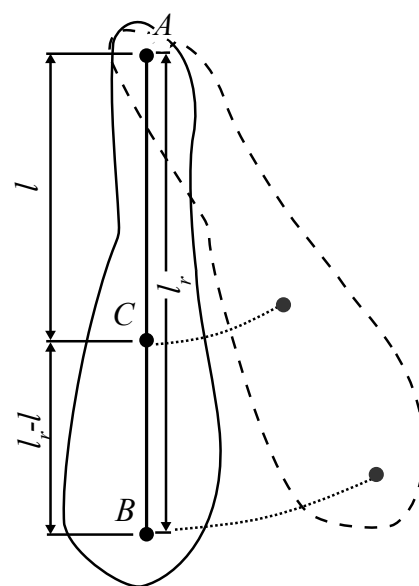


Wahadło rewersyjne

Jeżeli przez punkt A wahadła i środek masy C poprowadzimy prostą i na tej prostej z punktu A odłożymy odcinek równy długości zredukowanej l_r , to otrzymamy punkt B nazywany *środkiem wahań* wahadła fizycznego. Okres drgań wahadła fizycznego będzie miał taką samą wartość jeżeli oś obrotu umieścimy w środku wahań B.

Dowód tego twierdzenia jest następujący:

Dla wahań wokół osi przechodzącej przez punkt A, $l_r \equiv \frac{I_A}{ml}$, gdzie I_A jest momentem bezwładności wahadła względem tej osi. Zgodnie z twierdzeniem Steinera możemy tę równość zapisać w postaci:



Rys. 2. Wahadło rewersyjne, C – środek masy, B – środek wahań

$$l_r = \frac{I_C + ml^2}{ml} = \frac{I_C}{ml} + l \quad (7)$$

skąd wynika, że

$$(l_r - l)m = \frac{I_C}{l} \quad (7^*)$$

gdzie I_C jest momentem bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek masy C.

Dla osi obrotu przechodzącej przez środek wahań B:

$$l_r' \equiv \frac{I_B}{m(l_r - l)} = \frac{I_C + m(l_r - l)^2}{m(l_r - l)} = \frac{I_C}{m(l_r - l)} + (l_r - l) \quad (8)$$

gdzie I_B jest momentem bezwładności względem osi B.

Wstawiając (7*) do (8) otrzymujemy:

$$l_r' = l + \frac{I_C}{ml} = l_r$$

z czego wynika, że $T_A = T_B$, co było do udowodnienia.

Wykorzystywane w ćwiczeniu wahadło jest metalowym prętem zaopatrzonym w dwa pryzmaty, wzajemnie równoległe, zwrócone do siebie wierzchołkami, w ustalonej od siebie odległości. Na pręcie umieszczone są masy m_1 i m_2 w kształcie dwuwypukłych soczewek celem minimalizacji oporu powietrza. Masa m_1 jest zamocowana na stałe, masę m_2 można przesuwając wzdłuż pręta między ostrzami, zmieniając w ten sposób położenie środka masy C wahadła, a co za tym idzie wartość momentów kierujących i okresów przy drganiach wahadła względem odpowiednio osi A i B.

Dla określonego położenia masy m_2 , które trzeba znaleźć doświadczalnie, wahadło to staje się wahadłem rewersyjnym czyli odległość l między osiami A i B staje się długością zredukowaną l_r .

Rys. 3. Wahadło rewersyjne, układ pomiarowy

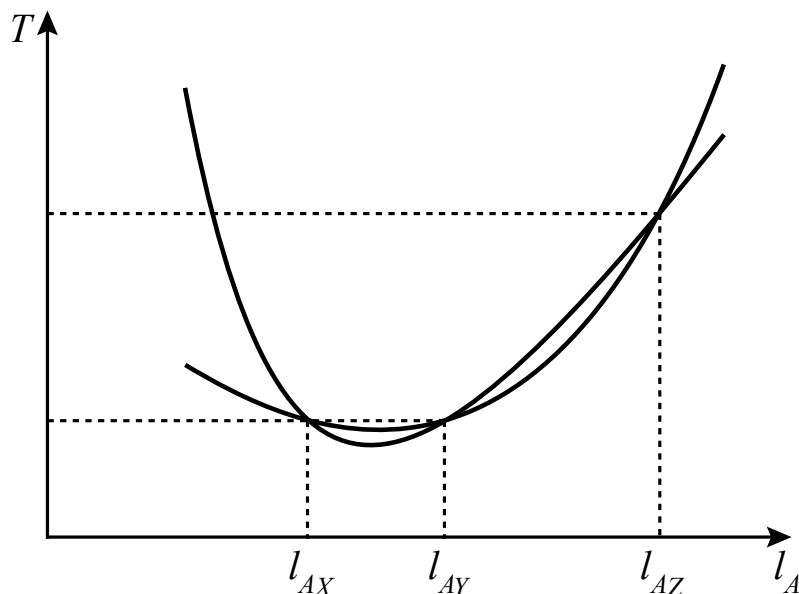
Mierząc okresy drgań wahadła T_A i T_B względem osi A i B dla ustalonych położen masy m_2 na pręcie (np. w odległości l_A od osi A) otrzymamy dwa ciągi

liczb $T_{A1}, T_{A2}, T_{A3} \dots T_{An}$ oraz $T_{B1}, T_{B2}, T_{B3} \dots T_{Bn}$ dla $l_{A1}, l_{A2}, l_{A3} \dots l_{An}$.

Można wykazać, że zależności okresów drgań wahadła T_A , T_B względem odpowiednio osi A i B w zależności od położenia l_A masy m_2 względem osi A wyrażają się ogólnymi zależnościami trzeciego stopnia postaci:

$$\begin{aligned} D_A l_A^2 + E_A l_A + F_A &= T_A^2 + G_A l_A T_A^2 \\ D_B l_A^2 + E_B l_A + F_B &= T_B^2 + G_B l_A T_B^2 \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie współczynniki $D_A, E_A, F_A, G_A, D_B, E_B, F_B, G_B$ są pewnymi stałymi zależnymi od wartości mas m_1 i m_2 , masy pręta, odległości między ostrzami wahadła, położenia masy m_1 .



Rys. 4. Zależności okresu drgań wahadła $T_A = f(l_A)$ i $T_B = f(l_A)$ dla dwóch zawieszek – na ostrzu A i ostrzu B.

Graficzne przedstawienie $T_A = f(l_A)$ oraz $T_B = f(l_A)$ daje dwie krzywe, które w zakresie możliwych zmian położenia l_A masy ruchomej m_2 , mogą się nie przecinać albo przecinać się w jednym, dwóch lub trzech punktach. (Rys. 4) W tym ostatnim przypadku jeden z punktów przecięcia nie ma sensu fizycznego (w położeniu l_{AZ}). Z którą sytuacją mamy do czynienia, zależy od położenia masy nieruchomej m_1 .

Położenie masy m_1 jest ustalone, i doświadczalnie tak dobrane, że krzywe $T_A = f(l_A)$ i $T_B = f(l_A)$ przecinają się w dwóch punktach l_{AX} i l_{AY} w zakresie

możliwych zmian położenia l_A masy m_2 . Dla położenia masy m_2 w tych punktach wahadło jest wahadłem rewersyjnym, co należy sprawdzić doświadczalnie. Zazwyczaj odczytane z wykresu wartości okresów T_X dla położenia l_{AX} , oraz T_Y dla położenia l_{AY} nieznacznie różnią się od siebie (ze względu na błędy pomiarowe), chociaż powinny być identyczne. Z tego powodu do wyznaczenia g ze wzoru (6) należy posłużyć się średnią

$$T = \frac{T_X + T_Y}{2}$$



Metodologia wykonania pomiarów

1. Zawiesić wahadło rewersyjne na ostrzu B i ustawić masę m_2 jak najbliżej ostrza A.
2. Wprawić wahadło w ruch (wychylenie $\varphi \leq 10^\circ$ dla każdego wzbudzenia takie samo) i zmierzyć za pomocą sekundomierza czas t dziesięciu wahań i wyliczyć wartość okresu $T_{B1} = t/10$.
3. Następnie odwrócić wahadło i zawiesić je na ostrzu A i podobnie jak punkcie 2 wyznaczyć wartość okresu T_{A1} .
4. Przesunąć masę m_2 o 5 cm w stronę B i ponownie wyznaczyć okres drgań T_{A2} dla zawieszenia A.
5. Wahadło odwrócić, zawiesić na ostrzu B i zmierzyć T_{B2} .
6. Powtórzyć pomiary wg. punktów 4, 5, znajdując w ten sposób dwa ciągi wartości okresów $T_{A1}, T_{A2}, \dots, T_{An}$ i $T_{B1}, T_{B2}, \dots, T_{Bn}$ dla wszystkich możliwych położeniach masy m_2 pomiędzy zawieszzeniami A i B w odstępach co 5 cm. Wyniki zapisać w tabeli.



Tabela pomiarowa

Kolorem szarym oznaczono te kolumny w których należy wykonać obliczenia.

l_{An} [m]	t_{An} [s]	t_{Bn} [s]	T_{An} [s]	T_{Bn} [s]	l_r [m]	T_{sr} [s]	$g \pm u(g)$ [m/s ²]
					1,30		



Obliczenia

- Oszacować niepewności standardowe, metodą typu B dla l_A i dla t , przyjmując: $\Delta l = 1 \text{ mm}$, $\Delta t = 0,2 \text{ s}$. Niepewność okresu $u(T)$ obliczyć z prawa przenoszenia niepewności $u(T) = u(t)/10$.
- Narysować wykres zależności $T_A(l_A)$ oraz $T_B(l_A)$ dla obu zawieszek A i B. Na wykresie zaznaczyć niepewności $u(T)$ i $u(l_A)$. Zwrócić uwagę na prawidłowy sposób narysowania wykresu, szczególnie na fakt, że nie wolno łączyć punktów pomiarowych. Narysowana linia ma być aproksymacją uzyskanych wyników. UWAGA! Oś rzędnych, na której odkładamy wartości T maksymalnie rozciągnąć (oś odciętych nie musi przecinać osi rzędnych w punkcie $T = 0$).
- Z wykresu odczytać wartości okresu drgań wahadła rewersyjnego T_X i T_Y odpowiadające punktom przecięcia krzywych $T_A(l_A)$ i $T_B(l_A)$ (Rys. 4). Obliczyć ich średnią arytmetyczną $T_{sr} = (T_X + T_Y)/2$.
- Niepewność $u(T_{sr})$ obliczyć z prawa przenoszenia niepewności

$$u(T_{sr}) = \sqrt{\left[\frac{\partial T_{sr}}{\partial T_X} u(T)\right]^2 + \left[\frac{\partial T_{sr}}{\partial T_Y} u(T)\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne. Obliczyć niepewność $u'(T_{sr})$ metodą typu A

$$u'(T_{sr}) = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (2-1)} [(T_X - T_{sr})^2 + (T_Y - T_{sr})^2]}$$

Do dalszych obliczeń przyjąć większą z niepewności $u(T_{sr})$ i $u'(T_{sr})$.

- Obliczyć przyspieszenie ziemskie ze wzoru (6), wstawiając wartość średnią T_{sr} .
- Niepewność przyspieszenia ziemskiego wyznaczyć z prawa przenoszenia niepewności

$$u(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial l_r} u(l)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial T_{sr}} u(T_{sr})\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne.

7. We wnioskach na początku zapisać poprawnie zaokrąglony wynik pomiarów. Porównać wyznaczoną wartość przyspieszenia ziemskiego g z wartością tablicową (za pomocą metody podanej w skrypcie Niepewności pomiarowe).