

Wyznaczanie momentów bezwładności brył sztywnych za pomocą wahadła skrętnego

Wymagania do ćwiczenia

1. Drgania harmoniczne proste i tłumione.
2. Wahadło skrętne.
3. Moment bezwładności bryły sztywnej.

Literatura

1. C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, Mechanika, PWN, Warszawa 1973 str. 225 – 243.
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy Fizyki, t. II, PWN, Warszawa 2003 str. 94 – 107.
3. OpenStacks, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1, Rozdział 10: [Obroty wokół stałej osi](#), Rozdział 15: [Drgania](#)

Przykładowe pytania

1. Zdefiniuj drgania harmoniczne proste. Jakie warunki muszą być spełnione, aby układ wykonywał takie drgania?.
2. Napisz równanie ruchu dla drgań harmoniczných prostych.
3. Jak zmienia się energia kinetyczna i potencjalna podczas drgań harmoniczných prostych?
4. Jak wygląda wykres wychylenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu w drganiach harmoniczných?
5. Wyjaśnij, czym są drgania tłumione.
6. Jak tłumienie wpływa na amplitudę i częstotliwość drgań?
7. Czym różni się wahadło skrętne od wahadła matematycznego?
8. W jaki sposób można wykorzystać wahadło skrętne do wyznaczenia momentu bezwładności?
9. Zdefiniuj moment bezwładności.
10. Wyjaśnij twierdzenie Steinera i podaj jego zastosowanie.

Przyrządy pomiarowe

- Wahadło skrętne
- Waga analityczna
- Suwmiarka

WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA

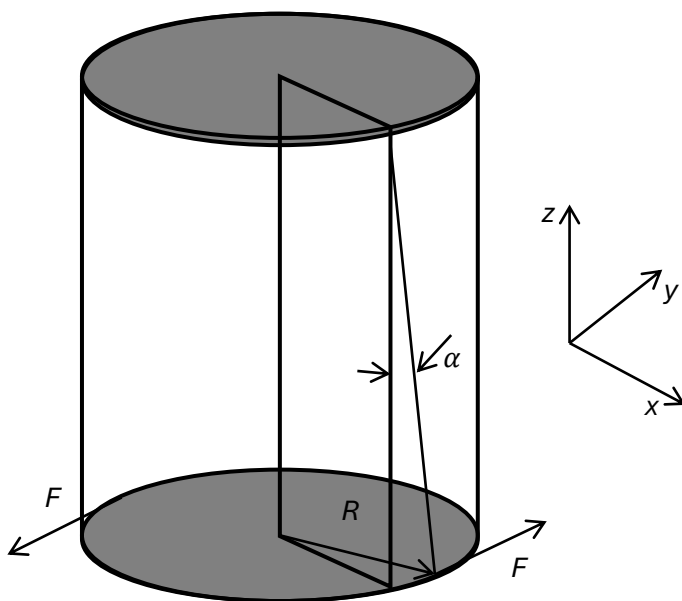


Wahadło torsyjne (skrętne)

Jeżeli jeden z końców długiego jednorodnego pręta sztywno zamocować, a do drugiego przyłożyć skręcający moment sił M_z , to koniec ten obróci się o kąt α , zgodnie z zależnością:

$$M_z = D\alpha \quad (1)$$

Stała (dla danego pręta) wielkość D nosi nazwę momentu kierującego wahadła. Liniowa zależność pomiędzy M_z i α wyrażona wzorem (1) zachodzi tylko dla niewielkich wartości momentu skręcającego M_z . Powyżej pewnej wartości M_z zależność $\alpha(M_z)$ jest nieliniowa. W skręconym o kąt α przecie istnieje równowaga pomiędzy przyłożonym momentem M_z i momentem reakcji pręta M . Po usunięciu zewnętrznego momentu sił M_z , powstają drgania pod wpływem momentu sił sprężystości pręta



Rys. 1. Pręt skręcany parą sił.

$$M = -D\alpha \quad (2)$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki równanie różniczkowe drgań skrętnych:

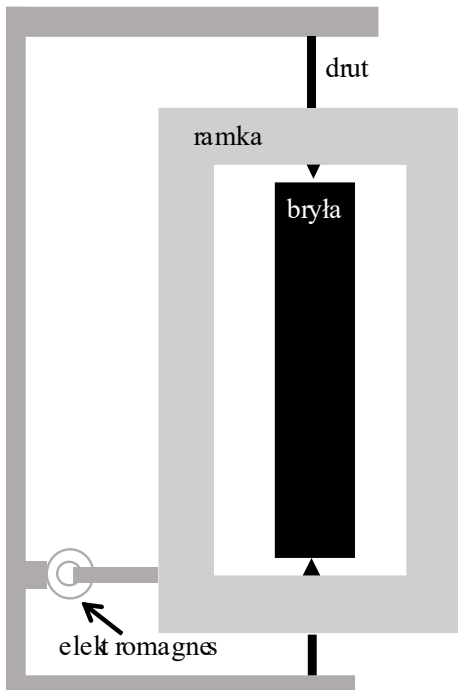
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I}\alpha = 0 \quad (3)$$

gdzie: I – moment bezwładności ciała zawieszonego na pręcie względem osi obrotu pokrywającej się z osią pręta (oś z). W zakresie proporcjonalności (2) drgania skrętne są drganiami harmonicznymi. Rozwiązanie równania (3) ma postać:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Iloraz $\frac{D}{I} = \omega^2$ jest częstością drgań własnych oscylatora skrętnego, z którego wynika, że okres drgań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (5)$$



Wyznaczając okres drgań T i moment kierujący D możemy wyznaczyć moment bezwładności I . Aby wyznaczyć moment bezwładności dowolnej bryły posłużymy się układem pomiarowym przedstawionym na rysunku 2. W tym celu należy określić okres drgań T_0 ramki nieobciążonej bryłą, a następnie okres drgań T_1 układu ramki z bryłą, których łączny moment bezwładności wynosi I_1 .

Okresy drgań skrętnych dla obydwu przypadków można zapisać następująco:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (6)$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}} \quad (7)$$

gdzie: I_0 - moment bezwładności ramki, I_w - moment bezwładności bryły wzorcowej o znanym momencie bezwładności (np. walca)

$$I_1 = I_0 + I_w$$

Z równań (6) i (7) można obliczyć I_0 i D

$$I_0 = \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} I_w \quad \text{oraz} \quad D = 4\pi^2 \frac{I_w}{T_1^2 - T_0^2} \quad (8)$$

Okres drgań układu z bryłą o nieznanym momencie bezwładności I_x wynosi:

$$T_x = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{D}}. \quad (9)$$

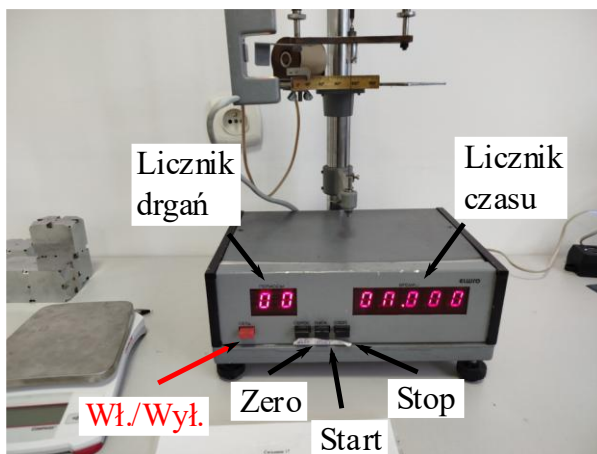
Po wstawieniu wyrażeń (8) do (9) otrzymujemy:

$$I_x = I_w \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (10)$$

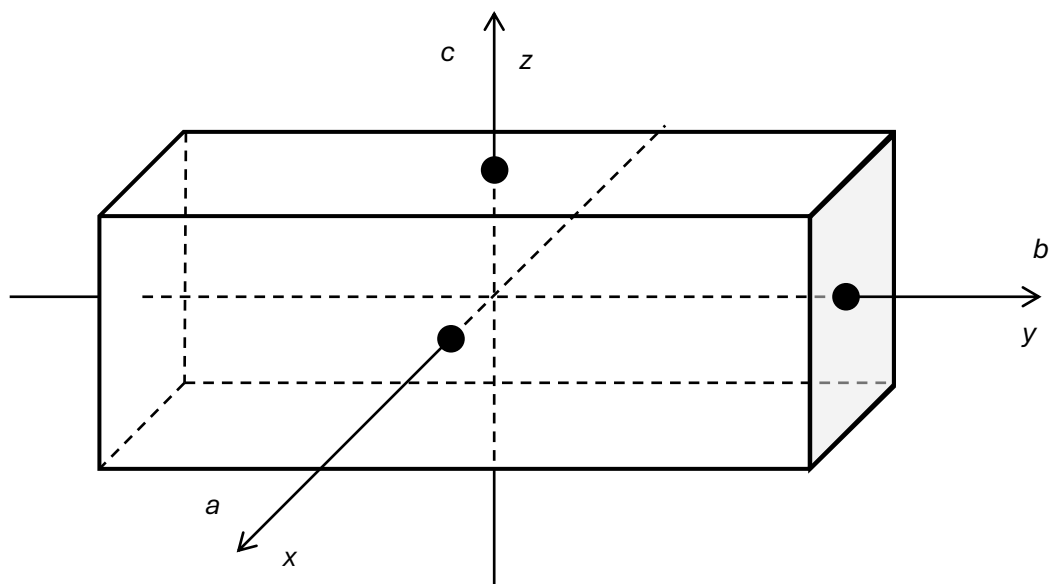


Metodologia wykonywania pomiarów

1. Ustawić elektromagnes wahadła na wybrany, podany przez prowadzącego kąt α . Włączyć napięcie wciskając przycisk zasilania.
2. Obrócić ramkę do położenia, w którym jest przytrzymywana przez elektromagnes. Po wyłączeniu prądu przepływającego przez elektromagnes ramka wykonuje drgania obrotowe, których liczbę i czas trwania mierzy układ elektroniczny. Odczyt cyfrowy czasu i liczby drgań następuje po naciśnięciu przycisku STOP. Przycisk należy wcisnąć po wyświetleniu $n - 1$ drgań.



3. Zmierzyć czas t_0 trwania $n = 10$ drgań samej ramki.
4. Zamocować w uchwycie ramki walec.
5. Wyznaczyć czas t_1 trwania $n = 10$ drgań układu.
6. Wyjąć walec z uchwytu ramki.
7. Zamocować badaną bryłę.
8. Zmierzyć czas t_{xi} trwania $n = 10$ drgań dla trzech głównych osi „ i ” badanej bryły, $i = a, b, c$ (Rys. 3).
9. Zmierzyć średnicę $2r$ walca i zważyć walec na wadze laboratoryjnej (masa m).



Rys. 3. Główne osie a, b, c prostopadłościanu.



Tabela pomiarowa

Wielkości mierzone					Wielkości liczone				
t_0 [s]	t_1 [s]	t_{xi} [s]	m [kg]	r [m]	T_0 [s]	T_1 [s]	T_{xi} [s]	I_w [kgm ⁻²]	I_{xi} [kgm ⁻²]



Obliczenia

- W oparciu o wykonane pomiary czasu trwania n drgań obliczyć okresy drgań:

- ramki $T_0 = \frac{t_0}{n}$,
- układu ramka-walec $T_1 = \frac{t_1}{n}$,
- układu ramka-bryła $T_{xi} = \frac{t_{xi}}{n}$, dla każdej osi głównej.

- Obliczyć moment bezwładności walca korzystając ze wzoru:

$$I_w = \frac{1}{2} m r^2$$

- W oparciu o wzór (10) obliczyć momenty bezwładności badanej bryły dla każdej osi głównej I_{xi} .
- Obliczyć niepewności standardowe: $u(t)$, $u(m)$ i $u(r)$ metodą typu B.
- Korzystając z prawa przenoszenia niepewności obliczyć niepewność $u(T) = \frac{u(t)}{n}$
- Obliczyć niepewność standardową wielkości złożonej I_w z zależności

$$u(I_w) = \sqrt{\left[\frac{\partial I_w}{\partial m} u(m)\right]^2 + \left[\frac{\partial I_w}{\partial r} u(r)\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne.

- Obliczyć niepewność standardową wielkości złożonej I_{xi} badanej bryły dla każdej osi obrotu

$$u(I_{xi}) = \sqrt{\left[\frac{\partial I_{xi}}{\partial I_w} u(I_w)\right]^2 + \left[\frac{\partial I_{xi}}{\partial T_0} u(T_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial I_{xi}}{\partial T_1} u(T_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial I_{xi}}{\partial T_{xi}} u(T_{xi})\right]^2}$$

wyznaczając i podając jawne wyrażenia na pochodne. We wnioskach zapisać poprawnie wynik.