

Wyznaczanie częstotliwości drgań widełek stroikowych metodą pomiaru częstości dudnienia

Zagadnienia do samodzielnego opracowania

1. Fale mechaniczne – równanie fali, rodzaje fal.
2. Superpozycja fal – dudnienia.

Literatura

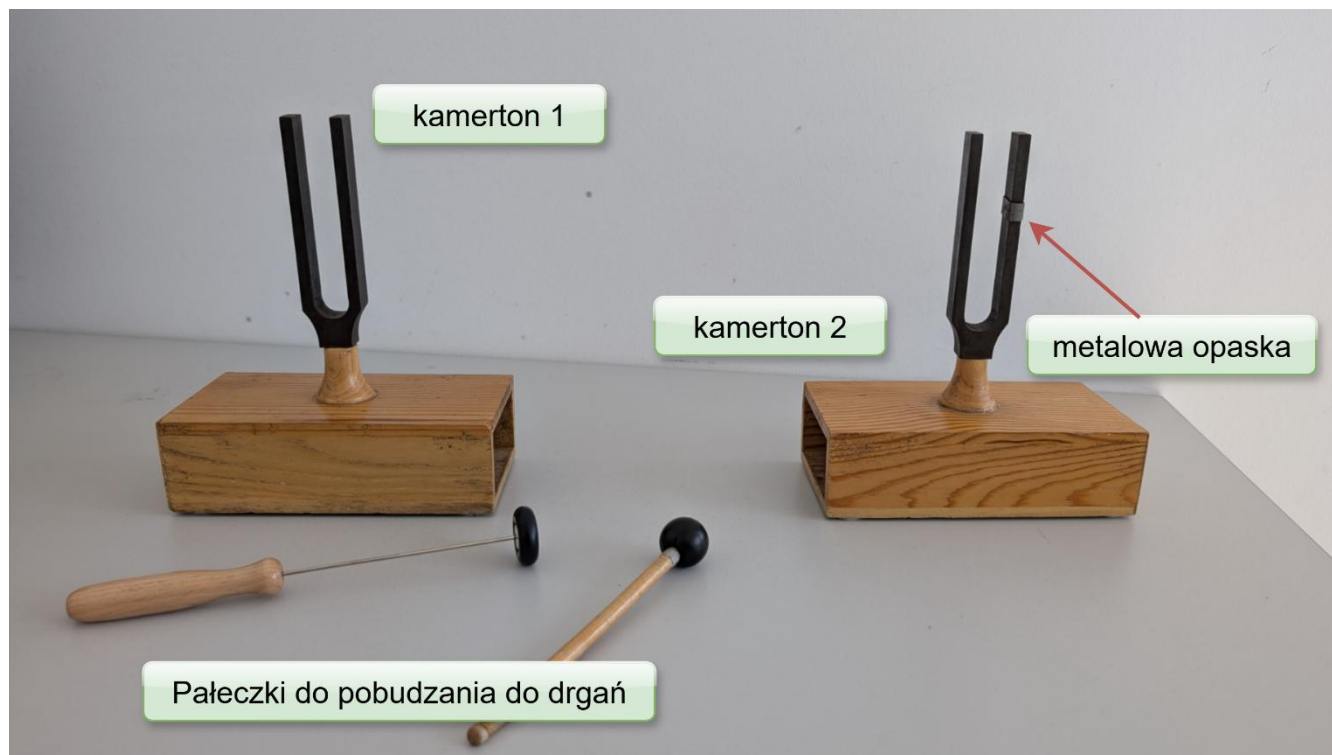
1. W. Sawieliew, Elektryczność i magnetyzm, Fale, Optyka. PWN, 1994, str. 331-341
2. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1, Rozdział 16. *Fale*

Przykładowe pytania

1. Zdefiniuj czym jest fala sprężysta.
2. Podaj przykłady fal sprężystych i fali niesprężystych
3. Jak możemy sklasyfikować fale? Podaj i omów kilka podstawowych kryteriów klasyfikacji.
4. Czym jest superpozycja ciągów falowych?
5. Czym są dudnienia? Jakie muszą być spełnione warunki aby w układzie doszło do dudnień?

Przyrządy pomiarowe / stanowisko pomiarowe

Stoper, linijka



WPROWADZENIE



Fale

Falą sprężystą nazywamy zjawisko rozprzestrzeniania się w ośrodku materialnym periodycznego zaburzenia pewnej wielkości fizycznej charakteryzującej stan tego ośrodka sprężystego. Fale sprężyste są to mechaniczne odkształcenia rozchodzące się w ośrodku sprężystym (gazie, cieczy lub ciele stałym). Źródłem fali sprężystej jest drgające ciało, które oddziałując z cząstkami ośrodka przekazuje im energię pobudzając do drgań. Drgające cząsteczki przekazują energię cząsteczkom sąsiednim, dzięki istnieniu sił spójności.

Wszystkie rodzaje fal sprężystych rozchodzą się – mówimy, że propagują się – w ośrodku wykazującym sprężystość objętości lub sprężystości postaci (kształtu). Wymienione tutaj rodzaje sprężystości wykazują gazy, ciecze i ciała stałe.

Zaburzenia ośrodka wywołujące ruch falowy posiadają pewną energię. Energia ta jest przenoszona w ośrodku przez falę, a zjawisko polegające na przenoszeniu energii bez przenoszenia materii, nazywamy transportem energii.

Fale można dzielić ze względu na różne kryteria podziału.

1. Jeśli jako kryterium podziału wybierzemy kierunek drgań ośrodka względem kierunku rozchodzenia się fali, to możemy mówić o falach podłużnych i poprzecznych: fala jest podłużna, jeśli kierunek drgań cząstek ośrodka jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fali, a jest poprzeczna, jeżeli kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali.
2. Ze względu na kształt powierzchni falowej możemy mówić o falach płaskich, kolistych i kulistych.
3. Ze względu na zaburzenia wywołujące falę możemy wyróżnić: impuls falowy i falę harmoniczną. Impuls falowy powstaje wówczas, gdy źródłem fali jest jednorazowe zaburzenie w ośrodku. Fala harmoniczna jest wytwarzana przez źródło wykonujące drgania harmoniczne (powtarzające się okresowo w czasie); w fali harmonicznnej wszystkie punkty ośrodka wykonują drgania harmoniczne z różnymi fazami, powtarzającymi się okresowo w przestrzeni.



Równanie fali płaskiej

Różniczkowe równanie fali wyprowadzimy w oparciu o II zasadę dynamiki Newtona zastosowaną do niewielkiego elementu drgającej struny. Na rysunku przedstawiono fragment struny (kolor pomarańczowy), na który działają siły pochodzące od sąsiednich fragmentów. Równanie ruchu wybranego elementu wzdłuż

osi y opisuje równanie II zasady dynamiki Newtona:

$$F_{wy} = \Delta m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1)$$

gdzie F_{wy} – siła wypadkowa, Δm – masa drgającego elementu struny o długości Δl , polu przekroju S i gęstości ρ . Długość elementu Δl , przy założeniu $\Delta y \ll \Delta x$, można zapisać jako:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \approx \Delta x,$$

Dla czytelności rysunku, proporcje pomiędzy Δy , Δx zostały przedstawione inaczej, niż w rzeczywistym układzie. Reasumując, szarpnięcie struny (wzdłuż osi y) spowoduje istotne wychylenie Δy i małą zmianę Δx . Masa elementu struny jest równa:

$$\Delta m = \rho S \Delta x$$

Siła F_{wy} powodująca drgania elementu Δx jest równa różnicy sił działających na obu końcach tego elementu:

$$F_{wy} = F_y(x + \Delta x) - F_y(x) = F \cdot (\sin \alpha)_{x+\Delta x} - F \cdot (\sin \alpha)_x$$

Dodatkowo wykorzystano fakt, że siła F jest stała na długości liny, jako siła napinająca linę.

Zakładamy, że struna zostaje nieznacznie wychylona z położenia równowagi (czyli kąt α jest mały), wówczas spełniony jest warunek $\sin \alpha = \tan \alpha$. Możemy więc ostatnie równanie zapisać jako:

$$F_{wy} = F \cdot (\tan \alpha)_{x+\Delta x} - F \cdot (\tan \alpha)_x = F \cdot \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \right] \quad (2)$$

Pochodną $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x}$ obliczoną w punkcie $x + \Delta x$ można rozwinąć w szereg Taylora:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_x + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \Delta x + \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_x \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

Wyrazy zawierające pochodne wyższego rzędu niż druga pomijamy, gdyż są nieznaczącymi poprawkami. Wstawiając ostatnie równanie do (2) otrzymamy:

$$F_{wy} = F \cdot \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_x + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \Delta x - \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \right] = F \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \Delta x = F \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x$$

Podstawiając wartości Δm i F_{wy} do równania ruchu (1), przyjmuje ono postać:

$$F\Delta x \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho S \Delta x \frac{d^2 y}{dt^2}$$

a po podzieleniu obu stron przez $\Delta x \rho S$

$$\frac{F}{\rho S} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Zauważmy, że wyrażenie $\frac{F}{\rho S}$ ma wymiar $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$ a więc jest to kwadrat jakiejś, nieznannej na razie prędkości.

Zmieniając stronami zapis powyższego wyrażenia, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe fali poprzecznej rozchodzącej się w kierunku osi x . Pochodne zwyczajne zamieniono pochodnymi cząstkowymi, ze względu na fakt, że funkcja y zależy od dwóch zmiennych: x i t . Jego rozwiązanie nazywane jest jednowymiarowym równaniem fali. Łatwo możemy sprawdzić, że jednym z rozwiązań równania (3) jest funkcja:

$$y(x, t) = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \alpha_0\right)$$

Licząc drugie pochodne po czasie i położeniu i podstawiając do równania (3) otrzymamy następujący związek:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

gdzie:

v – prędkość fazowa fali,

λ – długość fali – odległość między dwoma najbliższymi punktami, w których faza fali jest taka sama,

$f = \frac{1}{T}$ – częstość fali.

W ośrodkach wykazujących dyspersję, prędkość fazowa fali jest funkcją częstości fali (długości).

Wprowadzając wielkości $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – częstość fali, oraz $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ – liczba falowa, równanie falowe można przepisać w postaci:

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - qx - \alpha_0) \quad (4)$$

Równanie to zależy od dwóch zmiennych: położenia x i czasu t . Dla $x = \text{const} = c$, otrzymamy równanie:

$$y(x = 0, t) = A \cos(\omega t - (c_1 + \alpha_0))$$

przedstawiające drgania punktu odległego o x od źródła w funkcji czasu. Jeśli natomiast w równaniu (4) ustalimy chwilę czasu $t = \text{const}$, np. $t = 0$ otrzymamy równanie opisujące w jednym czasie wychylenia wszystkich kolejnych punktów wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali:

$$y(x, t = 0) = A \cos(-qx - \alpha_0)$$



Nakładanie się fal

Jeżeli w ośrodku rozchodzi się jednocześnie kilka fal, to nakładając się nie zaburzają się wzajemnie. Jednak drgania cząsteczek ośrodka w miejscu spotkania fal są geometryczną sumą drgań, które wykonywałyby cząsteczki podczas rozchodzenia się każdej z fal osobno. Stwierdzenie to nosi nazwę zasady superpozycji fal. Fale, o takiej samej częstotliwości i stałej w czasie różnicy faz nazywamy falami spójnymi lub koherentnymi. Podczas superpozycji fal spójnych występuje zjawisko interferencji (dodawania wychyleń), które prowadzi do zwiększenia lub zmniejszenia wychyleń i amplitudy fali wypadkowej, w zależności od różnicy faz fal składowych.

Rozważmy szczegółowo sytuację, w której dochodzi do superpozycji dwóch ciągów falowych o niewiele różniących się częstotliwościach, rozchodzących się w tym samym ośrodku i w tym samym kierunku:

$$y_1(t) = A \cos(\omega_1 t - q_1 x) = A \cos((\omega + \Delta\omega)t - (q + \Delta q)x)$$

$$y_2(t) = A \cos(\omega_2 t - q_2 x) = A \cos((\omega - \Delta\omega)t - (q - \Delta q)x)$$

Gdzie dla wygody użyto średniej częstości ω i średniej liczby falowej q :

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2} \quad \Delta k = \frac{q_1 - q_2}{2}$$

Korzystając z zasady superpozycji, zaburzenie wypadkowe zapiszemy jako sumę zaburzeń cząstkowych:

$$y = y_1 + y_2 = A \cos((\omega + \Delta\omega)t - (q + \Delta q)x) + A \cos((\omega - \Delta\omega)t - (q - \Delta q)x). \quad (5)$$

Dalej, skorzystamy ze związku na sumę cosinusów:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

i w konsekwencji otrzymamy wyrażenie na wychylenie wypadkowe w postaci:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos[\Delta\omega t - \Delta q x] \cdot \cos[\omega t - qx] \quad (6)$$

Wzór ten opisuje falę o średniej częstości:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2}$$

której amplituda zmienia się okresowo w czasie i przestrzeni zgodnie z zależnością:

$$A(t, x) = 2A \cos[\Delta\omega t - \Delta q x]$$

Jeśli ustalimy wartość x , np. $x = 0$, to amplituda drgania wypadkowego cząstek ośrodka w tym punkcie:

$$A(t) = 2A \cos(\Delta\omega t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = 2A \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)$$

czyli zmienia się w czasie z częstotliwością $f_m = \frac{f_1 - f_2}{2}$ nazywaną częstotliwością modulacji. Jeżeli f_1 niewiele

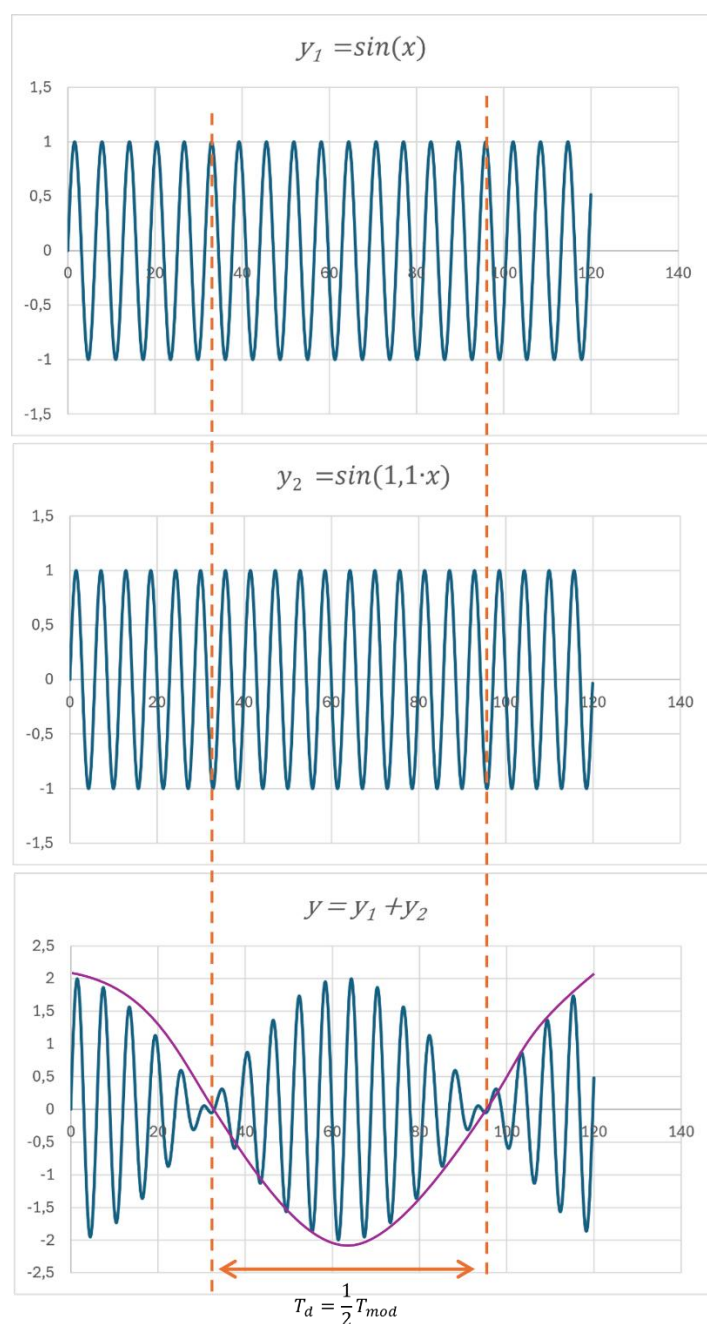
różni się od f_2 , to $f_m = \frac{f_1 - f_2}{2} \rightarrow 0$ co oznacza, że zmiany amplitudy są wolnozmiennie. Ogólnie mówimy, że drgania odbywające się z częstotliwością $f_{sr} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ są modulowane częstotliwością $f_m = \frac{f_1 - f_2}{2}$.

Okresy zmiany amplitudy drgań wywołane nakładaniem się dwu drgań o nieco różnych częstotliwościach nazywamy dudnieniami. Maksymalna amplituda fali – dudnienia – zachodzi wówczas, gdy:

$$\left| \cos \left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \right) \right| = 1$$

czyli w ciągu jednego okresu funkcji kosinus zdarza się dwa razy, zatem częstotliwość dudnień f_{dud} jest równa:

$$f_{dud} = 2f_m = f_1 - f_2 \quad (7)$$



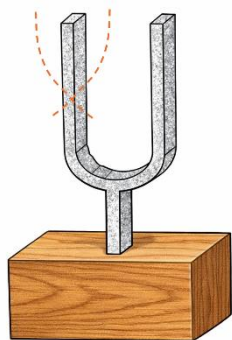
Na rysunku obok przedstawione są dwie fale różniące się nieznacznie częstotliwościami f (i długościami fali λ). Pod spodem (jako trzeci przypadek) przedstawiony jest wynik interferencji obu tych fal (fala sumaryczna). Można zauważyć, że pomiędzy dwiema przerywanymi liniami w przypadku pierwszej fali mieści się 10 okresów, natomiast w przypadku drugiej fali – 11 okresów.

Po interferencji obu fal składowych, fala wypadkowa wykazuje okresowe zmiany amplitudy, czyli dudnienie. Widać, że okres dudnienia jest dużo większy niż okresy obu fal składowych.

Rys 1. Wykresy przebiegu dudnienia i modulacji

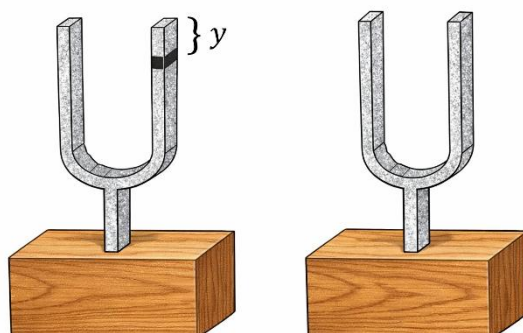


Metodologia wykonania ćwiczenia



Do obserwacji dudnień wykorzystujemy dwa kamertony o tych samych częstotliwościach drgań. Zmianę częstotliwości drgań jednego z nich uzyskujemy poprzez nałożenie metalowej opaski na jedno z ramion. Na rysunku obok linią przerywaną przedstawiono schematycznie falę stojącą w jednym z ramion kamertonu, powstającą w wyniku pobudzenia kamertonu do drgań. Fala stojąca jest innym niż omawiany wyżej przypadkiem fal. Na przecięciu obu przerywanych linii znajduje się węzeł fali stojącej, czyli miejsce gdzie ramię nie drga, a na końcu ramienia znajduje się strzałka, czyli miejsce największych drgań. Umieszczenie opaski w pobliżu miejsca, w

którym powstaje węzeł fali stojącej, nie wywoła zmiany częstotliwości drgań tego kamertonu i w rezultacie nie wywoła efektu dudnienia, lub będzie on bardzo słaby. Jeśli podczas wykonywania doświadczenia okaże się, że efekt dudnienia jest słabo słyszalny, należy nieco przesunąć metalową opaskę.



1. Ustawić widetki stroikowe w ten sposób, by pułta rezonansowe były skierowane otworami ku sobie.
2. Sprawdzić informację o częstotliwości drgań widetek „wybitą” na metalowym elemencie widetek i zapisać w tabeli wyników ($f_0 = 435$ [Hz]).
3. Nałożyć metalową opaskę na jedno z ramion kamertonu i ustawić ją w położeniu y_1 (względem końca), wskazanym przez prowadzącego zajęcia. Zmierzoną wartość zapisać w tabeli pomiarowej.
4. Uderzając młoteczkiem w widetki obu kamertonów wywołać dudnienie. Słuchając uważnie, zmierzyć czas t_1 dziesięciu kolejnych wzmocnień dźwięku (dudnień), wynik zapisać w tabeli pomiarowej. Pomiar powtórzyć 10 razy. Zwrócić uwagę, że jeśli któryś z pomiarów istotnie odbiega od pozostałych, to może to być wynikiem błędu przy liczeniu kolejnych dudnień (polegamy na naszym zmyśle słuchu i refleksie, który może nie być precyzyjny). W takim przypadku taki pomiar odrzucamy jako tzw. błąd grubo.
5. Zmienić położenie pierścienia do innej pozycji y_2 i powtórzyć czynności omówione w punkcie 4 (dla t_2).



Tabela pomiarowa

f_0	y	t	T_d	f_d	$f \pm u(f)$
[Hz]	[mm]	[s]	[s]	[Hz]	[Hz]
435		...			
		...			
		...			
		...			
		...			
		...			
		...			
		...			



Obliczenia

1. Obliczyć średnie wartości czasu 10 dudnień $t_{1,śr}$ i $t_{2,śr}$ dla każdego z dwóch położeń opaski. Niepewności $u(t_{1,śr})$ i $u(t_{2,śr})$ wyznaczyć metodą typu A.
2. Obliczyć okresy dudnień T_{d1} i T_{d2} . Niepewności $u(T_{d1})$ i $u(T_{d2})$ obliczyć metodą przenoszenia niepewności: $u(T_d) = u(t_{śr})/10$.
3. Wyznaczyć częstości dudnień f_{d1} i f_{d2} z okresów dudnień. Niepewności $u(f_{d1})$ i $u(f_{d2})$ wyznaczyć z metody przenoszenia niepewności: $u(f_d) = \left| \frac{df_d}{dT_d} \right| u(T_d)$.
4. Obliczyć częstości f_1 i f_2 drgań widełek stroikowych z opaską, dla obu położeń opaski ze wzoru: $f = f_0 - f_d$. Niepewności $u(f_1)$ i $u(f_2)$ wyznaczyć metodą przenoszenia niepewności: $u(f) = \left| \frac{df}{df_d} \right| u(f_d)$.