Politechnika Rzeszowska

im. Ignacego Łukasiewicza

Instrukcja do laboratorium 1

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH W POMIARACH ELEKTRYCZNYCH

ZAWARTOŚĆ

WPROWADZENIE

Celem ćwiczenia jest wprowadzenie studenta w nomenklaturę i metodologię szacowania niepewności pomiarów. Po zajęciach student powinien być przygotowany do samodzielnego opracowania i interpretacji wyników pomiaru.

Niepewność wyników pomiaru jest nierozłączną częścią dziedziny nauki jaką jest metrologia. Poprawne określenie niepewności pomiaru jest kluczowe dla interpretacji wyników, a w konsekwencji dla wiarygodności badań. Możliwe jest również późniejsze porównanie wyników z innymi badaniami oraz normami.

W celu lepszego zrozumienia wykorzystany zostanie przykład urządzenia, na którego wejście może zostać podane napięcie o wartości maksymalnej równej 12 V. Pracownik laboratorium dokonał pomiaru układu, w którym stwierdził, że zmierzone napięcie w momencie pomiaru wynosiło 11,5 V. Nieznane jest jednak urządzenie, przy pomocy którego dokonał pomiaru, oraz dokładność z jaką napięcie zostało zmierzone. Oznacza to, że rzeczywista wartość mogła wahać się w granicach 11,4 – 11,6 V (dokładność pomiaru ± 0,1 V) lub np. w granicach 10,5 - 12,5 V (dokładność pomiaru ± 1V). Należy zauważyć, że w przypadku dokładności ± 1 V, rzeczywiste napięcie podane na wejście urządzenia może być wyższe od dopuszczalnej maksymalnej wartości, co w konsekwencji doprowadzi do zniszczenia urządzenia.

WSTĘP TEORETYCZNY I NOMENKLATURA

BŁĄD CZY NIEPEWNOŚĆ

Błąd pomiaru jest to różnica pomiędzy wartością zmierzoną a wartością rzeczywistą. Szczególnym przypadkiem błędu pomiaru jest tzw. *błąd gruby*, za który uznajemy wynik znacząco odbiegający od innych pomiarów w serii. Wśród błędów występują również błędy *przybliżenia* oraz *przeoczenia (systematyczne)*.

Niepewność charakteryzuje graniczne wartości przedziału, wewnątrz którego z zadowalającym prawdopodobieństwem można umieścić wartość mierzonej wielkości. Jest to rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Z terminem niepewności pomiarowej połączone są definicje **dokładności** oraz **precyzji pomiaru**, czyli zależności zachodzących pomiędzy wartością zmierzoną a wartością rzeczywistą. Im mniejsza jest różnica wartości zmierzonej i rzeczywistej, tym większa dokładność pomiaru. Wysoka precyzja charakteryzuje się małym rozrzutem wartości w serii pomiarów.

Przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować zalecenia Międzynarodowego Komitetu Miar wydane przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną. Dostępna jest zarówno wersja polska (BIP), jak i angielska (Joint Committee for Guides in Metrology). Stosowanie ujednoliconych metod oraz oznaczeń umożliwia skuteczną weryfikację i wymianę informacji pomiędzy instytucjami naukowymi.

ŹRÓDŁA NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH

Powody występowania niepewności pomiarowych można podzielić na trzy kategorie. Źródłem niepewności pomiarowej może być m.in.:

I. Niepełna definicja mierzonej wielkości
II. Niedokładność przyrządów pomiarowych
    a. Rozdzielczość miernika
    b. Wartości wzorcowe
III. Sposób wykonania pomiaru
    a. Niedokładność układu pomiarowego
    b. Błędy ludzkie
    c. Przybliżenia i założenia procedury pomiarowej
    d. Losowe zakłócenia pomiaru

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA I WZORY

Błąd graniczny Δ_{gr} – wartość wyznaczająca największy możliwy błąd wskazania w dowolnym punkcie zakresu pomiarowego, zakładając prawidłowe użycie przyrządu. Błąd graniczy określony jest dla warunków odniesienia, określanych np. poprzez temperaturę, ciśnienie, wilgotność, brak zakłóceń.

Zakres pomiarowy Z – zakres, w którym możliwy jest poprawny pomiar.

Klasa dokładności K- wskaźnik liczbowy określający dokładność miernika analogowego. Wyrażany jest jako procentowy stosunek wartości błędu granicznego Δ_{gr} do zakresu pomiarowego Z.

Powyższe wartości łączą się ze sobą w następujący sposób:

$$K = \frac{\Delta_{gr}}{Z} \cdot 100\% \qquad (1)$$

$$\Delta_{gr} = \frac{K \cdot Z}{100\%} \qquad (2)$$

Przyrządy analogowe charakteryzuje klasa dokładności wyrażona liczbowo. Im większy wskaźnik klasy tym większy jest możliwy błąd pomiarowy. Najczęściej spotykane klasy dokładności to 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5.

Bezwzględny błąd graniczny ma zawsze stałą wartość, niezależnie od wielkości mierzonej. Względny błąd graniczny oblicza się następująco:

$$\delta_{gr} = \frac{\Delta_{gr}}{x} \cdot 100\% \qquad (3)$$

Gdzie x jest wartością zmierzoną. Na podstawie wzoru (3) można stwierdzić, że zakres pomiarowy należy dobrać tak, aby mierzona wartość znajdowała się w górnej połowie zakresu pomiarowego.

Procent wartości wskazanej *a* - wartość liczbowa określająca składową błędu miernika względem wartości mierzonej.

Procent zakresu *b* - wartość liczbowa określająca składową błędu miernika względem zakresu pomiarowego.

Składnik *nLSB* - wskaźnik określający wielokrotność rozdzielczości cyfrowego przyrządu pomiarowego na danym zakresie pomiarowym.

Błąd przyrządu cyfrowego może zostać zapisany na dwa sposoby, z wykorzystaniem powyższych wartości.

1) Procent wartości wskazanej + procent zakresu

Błąd jest sumą procenta wartości wskazanej oraz procenta zakresu, zależnych od wartości wskazanej x i zakresu pomiarowego Z_x. Wzory na błędy graniczne przyjmują następującą postać:

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot x + b \cdot Z_x}{100} \qquad (4)$$

$$\delta_{gr} = a + b \cdot \frac{Z_x}{x} \qquad (5)$$

2) Procent wartości wskazanej + nLSB

Wzory na błędy graniczne przyjmują wtedy postać:

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot x}{100} + n \cdot LSB \qquad (6)$$

$$\delta_{gr} = a + n \cdot \frac{LSB}{x} \cdot 100 \qquad (7)$$

NIEPEWNOŚCI POMIAROWE

Wyróżniamy 3 rodzaje niepewności standardowych – niepewność standardową typu A (u_A), niepewność standardową typu B (u_B) oraz całkowitą niepewność standardową u_c.

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA TYPU A (U_A)

Niepewność standardowa typu A obliczana jest metodami statystycznymi, przyjmując założenie, że dokonano wielu pomiarów przy użyciu tego samego narzędzia w takich samych warunkach. Z serii wyników $x_1, x_2, \dots, x_N$ obliczana jest średnia, która uznawana jest za najlepsze oszacowanie wielkości mierzonej.

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (8)$$

Miarą rozrzutu wyników wokół średniej jest odchylenie standardowe.

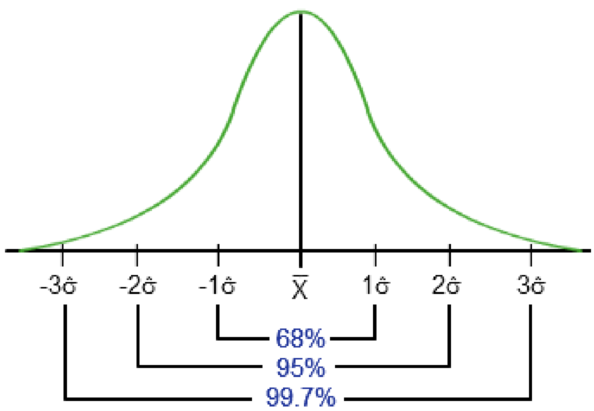
$$\boldsymbol{\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}} \qquad \mathbf{(9)}$$

Wielokrotne powtarzanie tego samego pomiaru doprowadziłoby do powstania wielu serii wyników pomiarowych, z innymi wartościami średnimi. Oznacza to iż wartość średnia również posiada określony rozrzut i może być opisana statystycznie. Odchylenie standardowe średniej, określające zmienność wartości średniej jest przyjmowane jako **niepewność standardowa typu A (u_A):**

$$u_A(X) = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \qquad (10)$$

Najczęściej rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędów pomiarowych jest rozkładem normalnym (Gaussa). Pozwala to na następującą interpretację wyników

- w przedziale $\overline{x} \pm \hat{\sigma}_x$ zawiera się 68% wyników pomiarowych,
- w przedziale $\overline{x} \pm 2\hat{\sigma}_x$ zawiera się 95% wyników pomiarowych,
- w przedziale $\overline{x} \pm 3\hat{\sigma}_x$ zawiera się 99% wyników pomiarowych.



RYSUNEK 1 ROZKŁAD NORMALNY GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zgodnie z powyższą interpretacją odchylenia standardowego, prawdopodobieństwo że wartość rzeczywista mierzonej wielkości mieści się w przedziale wyznaczonym przez niepewność standardową u_A wynosi 68%. Aby zwiększyć zaufanie do wyniku pomiaru, wprowadza się niepewność rozszerzoną $\boldsymbol{U}$, będącą iloczynem niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia $\boldsymbol{k}$.

$$U(X) = k \cdot u_c(X) \tag{11}$$

W zależności od ilości wyników pomiarów:

- N > 30: współczynnik rozszerzania przyjmuje wartość standaryzowanej zmiennej losowej rozkładu normalnego dla zadanego poziomu ufności *p* (Rysunek 1)

TABELA 1 WYBRANE WSPÓŁCZYNNIKI ROZSZERZENIA K DLA PRZYKŁADOWYCH POZIOMÓW UFNOŚCI (ROZKŁAD GAUSSA)

p	0,68 (1σ)	0,9	0,95 (2σ)	0,99
k	1,00	1,64	1,96	2,57

- N ≤ 30: współczynnik rozszerzania przyjmuje wartość standaryzowanej zmiennej losowej rozkładu t-Studenta, wartości odczytywane są z tablic standaryzowanych rozkładu dla wybranego poziomu ufności i liczby stopni swobody η.

W przypadku, gdy niemożliwe jest sklasyfikowanie rozkładu błędów jako rozkład Gaussa lub rozkład t-Studenta, przyjmuje się, że współczynnik rozszerzenia *k* wynosi 2 (*p*=0,95).

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA TYPU B (U_B)

Niepewność standardowa typu B jest wynikiem niedokładności aparatury pomiarowej i jest zależna od bezwzględnego błędu granicznego. Stosowana jest w przypadkach, gdy niemożliwa jest analiza serii pomiarów.

W skomplikowanych pomiarach niepewność typu B pozwala oszacować rząd wielkości niepewności. W przypadku dokładnych informacji dotyczących oceny niepewności, niepewność standardowa typu B może dać porównywalną dokładność, co niepewność standardowa typu A.

W przypadku przyrządów mechanicznych, takich jak np. suwmiarka lub śruba mikrometryczna, niepewność standardową typu B przyjmujemy równą tzw. *działce elementarnej*, równej najmniejszej działce skali (1 mm dla linijki, 0,05 mm dla suwmiarki, 0,01 mm dla śruby mikrometrycznej itp.). Dodatkowo niepewność może zostać skorygowana przez osobę dokonującą pomiaru na podstawie własnych doświadczeń. Przykładowo pomiar małego elementu linijką, może zostać doszacowany do wartości mniejszych niż 1mm, co zmniejszy wartość niepewności standardowej typu B. Pomiary dużych (kilkumetrowych) elementów przy pomocy taśmy mierniczej mogą być obarczone błędem większym niż 1mm wynikający z dokładności taśmy.

CAŁKOWITA NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA (U_C)

Całkowita niepewność standardowa jest wielkością wypadkową niepewności standardowych typu A i B. Obliczana jest ze wzoru:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \qquad (12)$$

W przypadku, gdy wartość niepewności jednego typu jest znacząco większa od wartości niepewności innego typu – całkowita niepewność standardowa może zostać przybliżona do wartości dominującej.

PRAWO PROPAGACJI NIEPEWNOŚCI

Jeżeli poszukiwana wartość wyliczana jest na podstawie wartości innych pomiarów, pomiar nazywamy **pomiarem pośrednim**.

Niepewność pomiarowa (Y) jest wtedy zależna od niepewności wartości składowych (X_n):

$$Y = f(X_{1,} X_2 \dots X_n) \qquad (13)$$

$$u_C(Y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \cdot u(X_n) \right]^2} \qquad (14)$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial X_n}$ jest pochodną równania (19) obliczoną względem X_n, $u(X_n)$ jest niepewnością standardową wartości pomiaru X_n.
Niepewności ($u(X_n)$) bezpośrednio zmierzonych wyników X_n”przenoszą się” na obliczoną wartość Y. Powoduje to, że wartość Y obarczona jest skończoną niepewnością, wynikającą z niepewności każdej jej składowej.

Wyznaczona w ten sposób wartość niepewności nazywana jest *niepewnością złożoną*. Wzór może zostać wykorzystany, gdy kolejne zmienne losowe są ze sobą nieskorelowane, tj. pochodzą z pomiarów różnymi przyrządami.

NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA

Dla znanej wartości niepewności standardowej u_c - wartość rzeczywista znajduje się w przedziale od $x - u(x)$ do $x + u(x)$ z prawdopodobieństwem 68% dla rozkładu Gaussa oraz 58% dla rozkładu jednostajnego.

Aby zdecydować, czy otrzymane wyniki są zgodne z wynikami innych badań, wprowadzone zostało pojęcie niepewności rozszerzonej *U*. Niepewność rozszerzona i oznacza, że w przedziale od $y - U(y)$ do $y + U(y)$ znajduje się przeważająca część wyników pomiaru. Niepewność rozszerzona obliczana jest ze wzoru:

$$U(Y) = k \cdot u(Y) \qquad (15)$$

gdzie k jest bezwymiarowym *współczynnikiem rozszerzenia* i najczęściej przyjmuje wartość równą 2. Wartości k = 2 odpowiada prawdopodobieństwo realizacji zmiennej losowej w przedziale $y - U(y)$ do $y + U(y)$ równe 95 % dla rozkładu Gaussa i 100 % dla rozkładu jednostajnego.

PORÓWNANIE WYNIKÓW POMIARÓW

PORÓWNANIE WYNIKU Z WARTOŚCIĄ TABELARYCZNĄ

Otrzymując wyniki pomiarowe z różnych pomiarów należy ocenić, czy są one sobie równe w granicach niepewności pomiaru. Aby obliczyć niepewność rozszerzoną należy wykorzystać wzór (16).

$$U(x_1 - x_2) = k\sqrt{[u(x_1)]^2 + [u(x_2)]^2}, \qquad (16)$$

gdzie:

- x_1, x_2 – wartości zmierzone,
- $u(x_1)$, $u(x_2)$ – niepewności standardowe,
- k – współczynnik rozszerzenia równy 2.

Wyniki pomiaru uznajemy za zgodne, jeżeli:

$$|x_1 - x_2| < U(x_1 - x_2), \qquad (17)$$

Przykładowo dla pomiaru $x_1 = 5{,}567$ zmierzonego z niepewnością $u(x1) = 0{,}023$ oraz wartości tabelarycznej wynoszącej x = 5,515 otrzymujemy:

$$|x_1 - x_2| = |5{,}567 - 5{,}515| = 0{,}052$$

Wzór (16) może zostać uproszczony do formy:

$$U(x_1) = k \cdot u(x_1) = 2 \cdot 0{,}023 = 0{,}046.$$

Jak widzimy otrzymana wartość pomiaru jest **niezgodna** z wartością tabelaryczną.

ZAPIS NIEPEWNOŚCI POMIARU

Niepewności pomiarowe należy zapisywać z dokładnością do dwóch cyfr znaczących. Większe wyniki niepewności należy zaokrąglić zgodnie z regułami zaokrąglania. Wartość mierzoną należy zaokrąglić do takiej ilości miejsc po przecinku, co wartość niepewności (zostawiając 0 na końcu jako cyfrę znaczącą). Wyniki pomiarów powinny zostać podane w jednostkach, w których ich wartości mieszczą się w przedziale od 0,1 do 1000.

Przykładowo dla niepewności rozszerzonej stosujemy zapis:

$$x = (9{,}560 \pm 0{,}023)\ m,$$

natomiast dla niepewności standardowej:

$$x = 9{,}560\ m; \qquad U(x) = 0{,}023\ m.$$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1

Analogowym woltomierzem o zakresie pomiarowym 100V i wskaźniku klasy 1 zmierzono napięcia 10V, 50V i 99V. Oblicz błędy graniczne pomiarów.

Bezwzględny błąd graniczny nie zależy od wartości mierzonej i wynosi dla zakresu pomiarowego 100V:

$$\Delta_{gr}U = \frac{K \cdot Z}{100} = \frac{1 \cdot 100}{100} = 1V$$

Względne błędy graniczne dla pomiarów wynoszą odpowiednio:

dla 10V:

$$\delta_{gr}U = \frac{\Delta_{gr}U}{U} \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10\%$$

dla 50V:

$$\delta_{gr}U = \frac{1}{50} \cdot 100 = 2\%$$

dla 99V:

$$\delta_{gr}U = \frac{1}{99} \cdot 100 = 1{,}01\%$$

odczyt w pełnym zakresie jest niemal równy wskaźnikowi klasy, jednak w najniższej części zakresu pomiarowego jest 10x większy!

PRZYKŁAD 2

Multimetrem cyfrowym zmierzono napięcie używając zakresu pomiarowego 20V - wyniosło ono 15,321V. Parametry urządzenia podano w formacie a% odczytu + b% zakresu:
a=0,035,
b=0,005.

$$\Delta_{gr}U = \frac{a \cdot x + b \cdot Z}{100} = \frac{0{,}025 \cdot 15{,}321 + 0{,}006 \cdot 40}{100} \cong 0{,}006\text{V}$$

$$\delta_{gr}U = a + b \cdot \frac{Z_x}{x} = 0{,}035 + 0{,}005 \cdot \frac{20}{15{,}321} = 0{,}04\%$$

PRZYKŁAD 3

Wykonano taki sam pomiar jak przykładzie 2 (U=15,321V). Użyte zostało inne urządzenie o parametrach dokładności podanych jako a% odczytu i nLSB.
Rozdzielczość pomiarowa wyniosła 2mV,
a= 0,02%,
n=5.

$$\Delta_{gr}U = \frac{a \cdot x}{100} + n \cdot LSB = \frac{0{,}02 \cdot 15{,}321}{100} + 5 \cdot 0{,}002 = 0{,}013V$$

$$\delta_{gr}U = a + n \cdot \frac{LSB}{x} \cdot 100 = 0{,}02 + 5 \cdot \frac{0{,}002}{15{,}321} = 0{,}021\%$$

PRZYKŁAD 4

Za pomocą cyfrowego multimetru wykonano 40 pomiarów napięcia. Zakładając, że niepewność typu B jest do pominięcia, określono niepewność typu A na poziomie ufności 0,95 - wyniki pomiarowe mają rozkład normalny.

Wartość średnia $\overline{U} = 1{,}539$,

Odchylenie standardowe $\hat{\sigma}_x = 0{,}281$,

Niepewność standardowa $u_A = 0{,}044$

Tabela wyników:

n	$U_i\ [V]$	$U_i - \overline{U}\ [V]$	$(U_i - \overline{U})^2\ [V^2]$
1	1,5111	-0,0283	0,0008
2	1,4871	-0,0523	0,0027
...			
40	1,6001	0,0607	0,0037
Σ	61,5781	0	2,5657

Odchylenie standardowe serii wynosi:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(U_i - \overline{U})^2} = 0{,}2811\ V$$

Odchylenie standardowe średniej (niepewność standardowa typu A) wynosi:

$$u_C = u_A(X) = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}2811}{\sqrt{40}} = 0{,}044V$$

Niepewność rozszerzona może być obliczona z wykorzystaniem współczynnika rozszerzenia z tablic rozkładu normalnego. Dla p=0,95 współczynnik ten wynosi k=1.96:

$$U(\overline{U}) = k \cdot u_C = 1{,}96 \cdot 0{,}044 = 0{,}087V$$

Wynik pomiaru jest następujący:

$$U_X = \overline{U} \pm U(\overline{U}) = 1{,}539 \pm 0{,}087\ V\ dla\ p = 0{,}95$$

Oznacza to iż z prawdopodobieństwem 95% rzeczywiste napięcie wynosi pomiędzy 1,452 V a 1,626 V.

PRZYKŁAD 5

Woltomierzem o zakresie pomiarowym Z_u = 120 V i wskaźniku klasy 0,5 jednokrotnie zmierzono napięcie 111,5 V. Jaki jest wynik pomiaru na poziomie ufności p=0,95?

- bezwzględny błąd graniczny pomiaru wynosi:

$$\Delta_{gr}U = \frac{K \cdot Zu}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 120}{100} = 0{,}6V$$

- niepewność standardowa wynosi:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_{gr}U}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}6}{\sqrt{3}} = 0{,}35V$$

- współczynnik rozszerzania:

$$k = \sqrt{3} \cdot p = \sqrt{3} \cdot 0{,}95 = 1{,}65$$

- niepewność rozszerzona:

$$U(U) = k \cdot u_B(U) = 1{,}65 \cdot 0{,}35 \cong 0{,}58V$$

- wynik pomiaru:

$$U_X = \overline{U} \pm U(\overline{U}) = 111{,}5 \pm 0{,}58V\ dla\ p = 0{,}95$$

PRZYKŁAD 6

Woltomierzem o zakresie pomiarowym 20V (a=0,035, b=0,005) zmierzono spadek napięcia na nieznanej rezystancji. Otrzymano wynik równy 11,231V. W obwodzie zmierzono również natężenie prądu amperomierzem klasy 1 o zakresie pomiarowym 0,5A, mierząc 0,339A. Oblicz wartość rezystancji i niepewność wyniku dla p=0,95.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{11{,}231\,V}{0{,}335\,A} = 33{,}525\,\Omega$$

Przyjęto jednostajny rozkład błędów pomiarowych i obliczono niepewności pomiarowe (typu B) dla wskazań przyrządów:

$$u_B(U) = \frac{\Delta_{gr}U}{\sqrt{3}} = \frac{a \cdot U + b \cdot Z}{\sqrt{3} \cdot 100} = \frac{0{,}035 \cdot 11{,}231 + 0{,}005 \cdot 20}{\sqrt{3} \cdot 100} \cong \quad \cong 0{,}0028V$$

$$u_B(I) = \frac{\Delta_{gr}I}{\sqrt{3}} = \frac{K \cdot Z_I}{\sqrt{3} \cdot 100} = \frac{1 \cdot 0{,}5}{\sqrt{3} \cdot 100} \cong 0{,}0029A$$

Niepewność złożona wylicza się następująco:

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \cdot u_B^2(U) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot u_B^2(I)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \cdot u_B^2(U) + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \cdot u_B^2(I)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \cdot u_B^2(U) + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \cdot u_B^2(I)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{0{,}339}\right)^2 \cdot 0{,}0029^2 + \left(\frac{11{,}231}{0{,}339^2}\right)^2 \cdot 0{,}0028^2} =$$

$$= \sqrt{7{,}3181 \cdot 10^{-5} + 0{,}0749} = 0{,}2738\Omega$$

Do obliczenia niepewności rozszerzonej na poziomie p=0,95 przyjęto współczynnik rozszerzania k=2.

$$U(R) = k \cdot u(R) = 2 \cdot 0{,}2738 = 0{,}55\Omega$$

Wynik pomiaru jest następujący:

$$\boldsymbol{R_X = R \pm U(R) = 33{,}53 \pm 0{,}55\,\Omega\ dla\ p = 0{,}95}$$

BIBLIOGRAFIA

BIP. *DOKUMENT EA-4/02.* [Online] [Zacytowano: 5 maj 2016.] http://bip.gum.gov.pl/pl/bip/px_ea_4_02.pdf.

Joint Committee for Guides in Metrology. Guide to the expression of uncertainty in measurement. [Online] [Zacytowano: 5 maj 2016.] http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM/JCGM100/C045315e-html/C045315e.html?csnumber=50461.